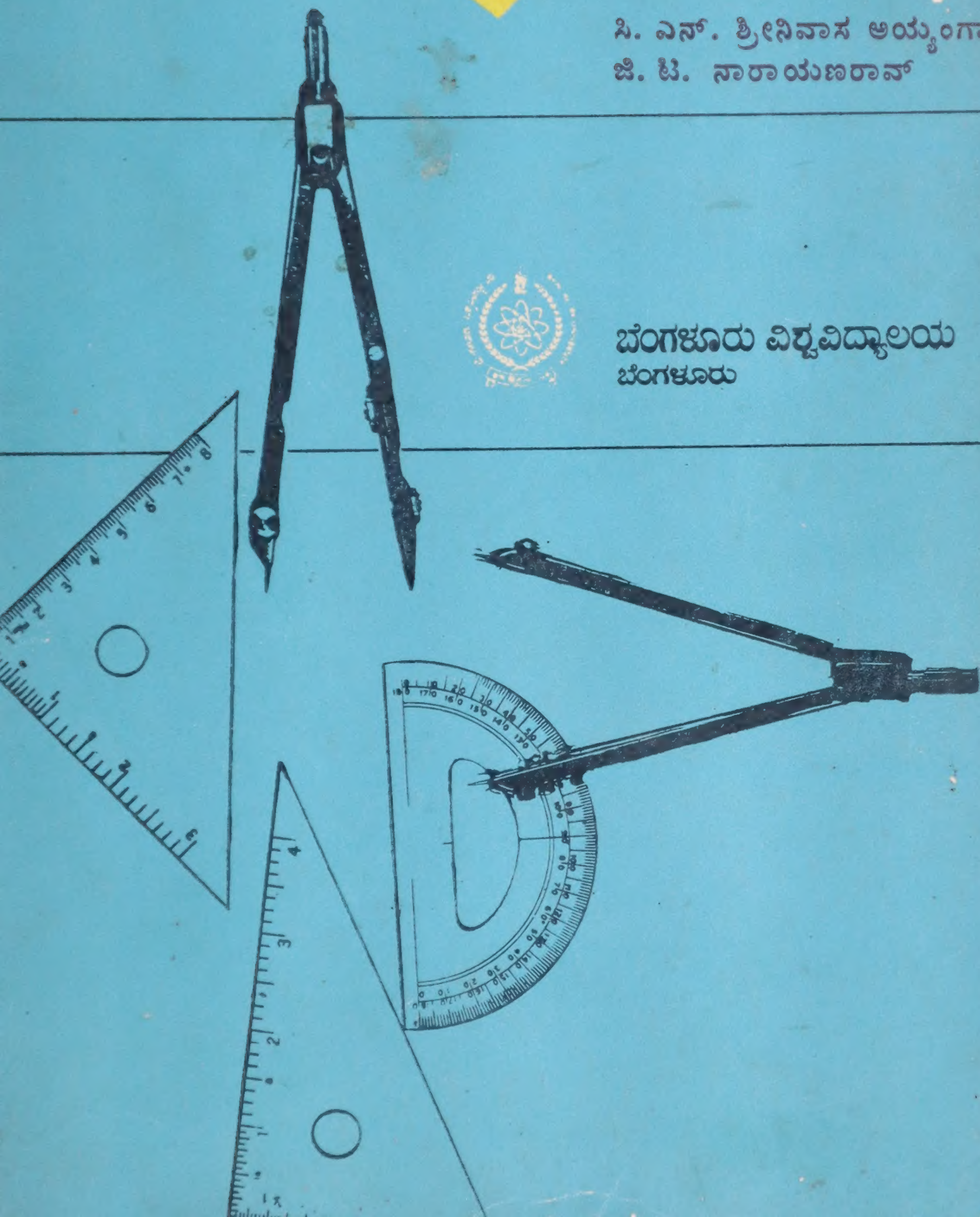
ಜ್ಯಾಮಿತಿ

ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾ
ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು



ಜ್ಯಾಮಿತಿ Geometry

ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್
ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

ಪ್ರಕಟಣ ಮತ್ತು ಪ್ರಚಾರೋಪನ್ಯಾಸ ವಿಭಾಗ
ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ : 44

GEOMETRY: C. N. Srinivasiengar and G. T. Narayana Rao
Published by Bangalore University, Bangalore. Pp. 332+viii 1974.

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕರು :
ಡಾ॥ ಜಿ. ಎಸ್. ಶಿವರುದ್ರಪ್ಪ

ಪ್ರಕಾಶಕರು
ಕೆ. ಸಿ. ಶಿವಪ್ಪ
ಉಪನಿರ್ದೇಶಕ
ಪ್ರಕಟಣ ಮತ್ತು ಪ್ರಚಾರೋಪನ್ಯಾಸ ವಿಭಾಗ
ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು 560039

ಬೆಲೆ: ರೂ. 6–00

ಮುದ್ರಕರು :
ಎಂ. ಎಸ್. ಚಿಂತಾಮಣಿ
ಈಸ್ಟರ್ನ್ ಪ್ರೆಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು 560029

ಮುನ್ನುಡಿ

ಅನೇಕ ವರ್ಷಗಳ ಪರಭಾಷಾ ಪ್ರಭುತ್ವ, ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಲು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಯ ಸಾಮರ್ಥ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ಇರುವ ಸಂದೇಹ ಮತ್ತು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಗ್ರಂಥಗಳ ಕೊರತೆ – ಇವು ಕನ್ನಡ ನಾಡಿನಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ವಿಚಾರವಂತರನ್ನು ದಂಗುಬಡಿಸಿ, ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಗೆ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯಗಳಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಲು ಅಡ್ಡಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡಿವೆ. ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳ ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ಮತ್ತು ಸಾಹಿತ್ಯಿಕ ಪರಂಪರೆಯುಳ್ಳ ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಗೆ, ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಷಯಗಳ ವೈಚಾರಿಕ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಲು ಶಕ್ತಿ ಇಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದು ಅಸಮಂಜಸ; ಅದನ್ನೀಗ ನಂಬಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ ಕನ್ನಡವನ್ನು ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನಾಗಿ ರೂಢಿಸುವ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ, ಕರ್ನಾಟಕದ ಇತರ ಎರಡು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯಗಳಂತೆಯೇ ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಪಾಲುಗೊಂಡಿದೆ. ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸತಕ್ಕವರು, ಇದು ಆರಂಭವಾದದ್ದು 1964-65 ರಲ್ಲಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಮರೆಯಬಾರದು. 1967 ರಂದು ಉನ್ನತ ಮಟ್ಟದ ಶಿಕ್ಷಣ ಹಾಗೂ ತಿಳಿವು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿಯೇ ದೊರಕುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬ ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ಕೈಕೊಂಡ ಈ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಆರಂಭಿಸಿತು. ಸರ್ಕಾರದ ನೆರವಿನಿಂದ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುವ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಕೈಕೊಂಡು, ಈ ಕೆಲವೇ ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ, ಈ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ ಗಣನೀಯವಾದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿ, ಎಲ್ಲರ ಗಮನವನ್ನು ಸೆಳೆದುಕೊಂಡಿದೆ.

ದಿನದಿನಕ್ಕೆ ಮಾನವಿಕ ಮತ್ತು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಜ್ಞಾನ ಭರದಿಂದ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿದೆ. ಪ್ರಗತಿಪರ ಜ್ಞಾನಾರ್ಜನೆಗೆ ಯೋಗ್ಯ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಒದಗಿಸುವ ಸಾಹಸದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ತೊಡಗಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಶ್ರದ್ಧೆ ಸಹಕಾರಗಳಿಂದ ನಮ್ಮ ಕಾರ್ಯ ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಣಮಟ್ಟ ಸಾರ್ಥಕ ನಿಲುವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವುದರಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವೇ ಇಲ್ಲ.

ಎಚ್. ನರಸಿಂಹಯ್ಯ
ಉಪಕುಲಪತಿ
ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ

ನಾಲ್ಕು ಮಾತು

ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಂತಹ ಉನ್ನತ ಶಿಕ್ಷಣವಲಯದಲ್ಲಿ, ಭಾರತದ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳು ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಬಲ್ಲವೆ, ಒಂದು ವೇಳೆ ಆದರೆ ಬಹು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಭಾರತದಂತಹ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಅದರ ಪರಿಣಾಮಗಳೇನು – ಎನ್ನುವ ಚರ್ಚೆ ಇನ್ನೂ ಈ ದೇಶದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಲೇ ಇದೆ. ಈಜು ಬಾರದೆ ನೀರಿಗಿಳಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬಂತಿರುವ ಈ ಚರ್ಚೆಗಳನ್ನು ಅತ್ತ ಬಿಟ್ಟು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರವೃತ್ತರಾಗುವುದೊಂದೇ ನಮಗಿರುವ ದಾರಿ. ಏಕೆಂದರೆ, ಯಾವ ಶಿಕ್ಷಣವೇ ಆಗಲಿ ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗುವುದು, ನಮಗೆ ಪರಂಪರಾಗತವಾದ ಹಾಗೂ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಚಲಿತವಾದ ನಮ್ಮ ನಮ್ಮ ಭಾಷೆಯ ಮೂಲಕವೇ ಹೊರತು ಬೇರೆ ಭಾಷೆಯ ಮೂಲಕ ಖಂಡಿತ ಅಲ್ಲ. ಹಾಗೆ ಆ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನಾಗಿ ಪಳಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಆಯಾ ಭಾಷೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಅಭಿಮಾನವುಳ್ಳ, ತಿಳಿವಳಿಕೆಯುಳ್ಳ ವಿಚಾರವಂತರನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಹೀಗೆ ವಿಚಾರವಂತರನ್ನು ಪ್ರಚೋದಿಸುವ, ಮತ್ತು ಅವರ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಅವಕಾಶಮಾಡಿಕೊಡುವ ಕಾರ್ಯವನ್ನು, ಕನ್ನಡನಾಡಿನ ಮೂರೂ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯಗಳಲ್ಲಿ, ಸರ್ಕಾರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿರುವ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಪ್ರಕಟಣ ವಿಭಾಗಗಳು ಕೈಕೊಂಡು ಈಗಾಗಲೇ ತಕ್ಕ ಪ್ರಮಾಣದ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿವೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಪ್ರಕಟಣ ವಿಭಾಗದ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನ ಹೀಗಿದೆ: ಮಾನವಿಕ ಹಾಗೂ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಣತರಾದವರನ್ನು, ಅದರಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುಕಾಲ ಬೋಧಕರಾದವರನ್ನು ಆಯಾ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಕೇಳಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ರಚಿತವಾದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಭಾಷಾ ತಜ್ಞರ ಪರಿಶೀಲನೆಗೆ ಒಳಪಡಿಸಿ ಆ ಪಠ್ಯ ವಿಷಯದ ಭಾಷೆಯ ನಿರ್ದುಷ್ಟತೆಯನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅನಂತರ ಅದು ಸೊಗಸಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಚ್ಚಾಗಿ ಬಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗೆ ಒದಗುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಮೂಲತಃ ಆಯಾ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನುದ್ದೇಶಿಸಿ ರಚಿತವಾಗಿದ್ದರೂ ಅವು ಆಯಾ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿಯುಳ್ಳ ಇತರರಿಗೂ ಉಪಯೋಗವಾಗಬೇಕೆನ್ನುವ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಹೊರತಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ಐಚ್ಛಿಕ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಿದೆ. ವರ್ಷದಿಂದ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಈ ಐಚ್ಛಿಕ ಮಾಧ್ಯಮವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗುವ ಸೂಚನೆಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತಿವೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಬರಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ವಿಷಯದಲ್ಲೂ ತೀವ್ರಗತಿಯಿಂದ ಬೆಳೆಯು ತ್ತಿರುವ ಸಮಕಾಲೀನ ವೈಚಾರಿಕ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಸ್ವಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವ ಸವಾಲನ್ನು ನಾವು ಎದುರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈ ಮಹಾಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಈ ಯೋಜನೆಗೆ ಬೆಂಬಲವಾಗಿ, ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಪ್ರಕಟಣ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲ ರೀತಿಯ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿರುವ, ಪ್ರಕಟವಾಗು ತ್ತಿರುವ, ಪುಸ್ತಕಗಳಿಗೆ ಮುನ್ನುಡಿ ಬರೆದು ಹರಸುತ್ತಿರುವ ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವ ವಿದ್ಯಾಲಯದ ಮಾನ್ಯ ಉಪಕುಲಪತಿಗಳಿಗೆ, ಇನ್ನೆಲ್ಲ ಸಹಾಯ ಸಹಕಾರಗಳನ್ನು ನೀಡು ತ್ತಿರುವ ರಿಜಿಸ್ಟ್ರಾರ್ ಅವರಿಗೆ ನಮ್ಮ ವಂದನೆಗಳು.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದುಕೊಟ್ಟು ನಮ್ಮೊಡನೆ ಸಹಕರಿಸುತ್ತಿರುವ ಶ್ರೀ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್ ಅವರಿಗೂ ನಾವು ಕೃತಜ್ಞರು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ದಿವಂಗತ ಪ್ರೊ. ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್ ಅವರ ಸೇವೆಯನ್ನು ಕೃತಜ್ಞತೆಯಿಂದ ಸ್ಮರಿಸುವುದು ನಮ್ಮ ಕರ್ತವ್ಯ. ಈ ಪುಸ್ತಕ ಮುದ್ರಣ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ನೆರವಾದ ಈಸ್ಟರ್ನ್ ಪ್ರೆಸ್ಸಿನ ಶ್ರೀ ಎಂ. ಎಸ್. ಚಿಂತಾಮಣಿ ಅವರಿಗೂ ನಮ್ಮ ವಂದನೆಗಳು ಸಲ್ಲುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಕಟಣ ಮತ್ತು ಪ್ರಚಾರೋಪನ್ಯಾಸ ವಿಭಾಗದ ಉಪನಿರ್ದೇಶಕರಾಗಿ, ಅತ್ಯಂತ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ಈ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿರುವ ಶ್ರೀ ಕೆ. ಸಿ. ಶಿವಪ್ಪನವರಿಗೆ ನಮ್ಮ ಅಭಿನಂದನೆಗಳು.

ಜಿ. ಎಸ್. ಶಿವರುದ್ರಪ್ಪ
ಅಧ್ಯಕ್ಷರು
ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ

PREFACE

The present text book is a sequel to the book **Beejarekha Ganitha Mattu Trikonamithy** written by me in Kannada and published by the Bangalore University (1968). That book was to cover a portion of the first year degree syllabus in Mathematics as prescribed by the Bangalore University in 1966-67. The present volume covers the Geometry syllabus of the second year degree class. It is hoped that the across-the-page presentation of the matter in English and Kannada will be found useful by the readers.

Professor F. J. Noronha, Head of the Department of Mathematics, Bangalore University and Dr. R. S. Mugali, the then Chairman of the Kannada Text Book Committee of the Bangalore University asked Dr. C. N. Srinivasiengar and me to prepare this volume (1968). We completed the manuscript in 1969. The discerning reader will certainly notice the master-mind of Dr. C. N. Srinivasiengar running through the entire book. We miss him very much today. But his contributions in various fields of learning will stand as eloquent tributes to his single-minded devotion to the cause of learning.

I am grateful to Professor F. J. Noronha and Dr. R. S. Mugali for the honour they have bestowed on us, the authors of this book. Sri K. C. Shivappa has pursued the printing and publication of this book with great imagination and initiative. I thank him and the Department of Publications of the Bangalore University for their kind help. The Eastern Press have done a very neat job in printing this Mathematics book. I am indebted to them.

"Athree", VIII Cross
Saraswathipuram
Mysore-570009
1 January 1974

G. T. NARAYANA RAO

Contents

ಪರಿವಿಡಿ

GEOMETRY

ಜ್ಯಾಮಿತಿ

CHAPTER I

GENERAL CONIC

1.1 Resume. A conic is defined as the locus of a point P which moves such that its distance from a fixed point S bears a constant ratio $e:1$ to its distance from a fixed line l. S is called the focus, l the directrix and e the eccentricity. The shape of the conic varies according to the values of e. When $e<1$ it is a closed curve called the ellipse; when $e=1$ the curve opens out to infinity—it is a parabola; and when $e>1$ the curve has two branches both opening out to infinity—it is a hyperbola. Ellipse and hyperbola have finite centres; they are called the central conics. The centre of the parabola is at infinity. The parabola may be viewed as the limiting case of the ellipse when the latter's centre recedes to infinity. The general equation of a conic is $F \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$. It is the general equation of the second degree in x and y.

1.2 Summary. A summary of the more important formulae relating to the conics is given here below :

$$F \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

$$F_1 \equiv axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$$

$$\equiv \tfrac{1}{2}\left(x\frac{\partial F}{\partial x_1}+y\frac{\partial F}{\partial y_1}+\frac{\partial F}{\partial \omega_1}\right)$$

$$\equiv \tfrac{1}{2}\left(x_1\frac{\partial F}{\partial x}+y_1\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)$$

$$F_{11} \equiv ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$

$$F_{12} \equiv F_{21} \equiv ax_1x_2+h(x_1y_2+x_2y_1)+by_1y_2+g(x_1+x_2) + f(y_1+y_2)+c$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೧

ಶಂಕುಜದ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ

೧.೧ ಪುನರವಲೋಕನ

ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು S ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರ ಸರಳರೇಖೆ l ಇವುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಚರಬಿಂದು P ಯ ದೂರಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $e : 1$ ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ P ಯ ಪಥ ಒಂದು ಶಂಕುಜ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. S ಅದರ ನಾಭಿ, l ಚಾಲಕ ಮತ್ತು e ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ. e ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿ ಶಂಕುಜದ ಆಕಾರ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. $e < 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಹೆಸರಿನ ಮುಚ್ಚಿರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯೂ, $e = 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ಅನಂತಕ್ಕೆ ತೆರೆದುಕೊಂಡಿರುವ ಪ್ಯರಾಬೋಲವೂ, $e > 1$ ಆಗಿರುವಾಗ ಎರಡು ಅನಂತವ್ಯಾಪೀ ಶಾಖೆಗಳಿರುವ ಹೈಪರ್ಬೋಲವೂ ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್ಬೋಲಗಳಿಗೆ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜಗಳು. ಪ್ಯರಾಬೋಲದ ಕೇಂದ್ರ ಅನಂತದಲ್ಲಿದೆ. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಅನಂತವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ ಆ ಶಂಕುಜದ ಮಿತಿ ಪ್ಯರಾಬೋಲ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಶಂಕುಜದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ $F \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$. ಇದು x ಮತ್ತು y ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ.

೧.೨ ಸಾರಾಂಶ

ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಾರಾಂಶ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ :

$$F \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

$$F_1 \equiv axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$$

$$\equiv \tfrac{1}{2}\left(x\frac{\partial F}{\partial x_1}+y\frac{\partial F}{\partial y_1}+\frac{\partial F}{\partial \omega_1}\right)$$

$$\equiv \tfrac{1}{2}\left(x_1\frac{\partial F}{\partial x}+y_1\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)$$

$$F_{11} \equiv ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$

$$F_{12} \equiv F_{21} \equiv ax_1x_2+h(x_1y_2+x_2y_1)+by_1y_2 +g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+c$$

F = 0 represents

(i) a pair of straight lines if

$$\Delta \equiv abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

(ii) a circle if $a = b$, $h = 0$

(iii) an ellipse, a parabola, a hyperbola according as $ab - h^2 \gtreqless$ or < 0.

Polar of the point (x_1, y_1) w.r.t. $F=0$; chord of contact of tangents from (x_1, y_1) to $F = 0$; tangent at (x_1, y_1) on $F=0$ all have the same equation $F_1 = 0$

Pair of tangents from (x_1, y_1) to $F=0$ has the combined equation $FF_{11} = F_1{}^2$.

Chord whose midpoint is (x_1, y_1) is $F_1 = F_{11}$.

Chord joining (x_1, y_1), (x_2, y_2) on $F=0$ is $F_1 + F_2 = F_{12}$.

Standard equations to conics;

Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $b^2 = a^2(1-e^2)$, $e < 1$.

Foci $(\pm ae, 0)$. Corresponding directrices $x = \pm \dfrac{a}{e}$

Parabola $y^2 = 4ax$, $e = 1$

Focus $(a, 0)$. Directrix $x = -a$

Hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $b^2 = a^2(e^2-1)$, $e = > 1$

Foci, directrices as for ellipse.

Rectangular hyperbola $xy = c^2$ or $x^2 - y^2 = a^2$

Asymptotes of $F=0$, $F - \dfrac{\Delta}{ab - h^2} = 0$

Director circle of ellipse $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Director circle of the hyperbola $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

$F = 0$ ಸೂಚಿಸುವ ಪಥ

(1) $$\Delta \equiv abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 \equiv \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

ಆಗಿರುವಾಗ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು.

(2) $a = b,\ h = 0$ ಆಗಿರುವಾಗ ಒಂದು ವೃತ್ತ.

(3) $ab - h^2 \geqq$ ಅಥವಾ < 0 ಒಂದು ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತ, ಪ್ಯರಾಬೊಲ ಅಥವಾ ಹೈಪರ್ಬೋಲ.

$F = 0$ ಯನ್ನು ಕುರಿತು (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯ ; (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾ ; $F = 0$ ಯ ಮೇಲಿರುವ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಲ್ಲವುಗಳ ಸಮೀಕರಣ $F_1 = 0$.

(x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $F = 0$ ಗೆ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ $FF_{11} = F_1^2$.

(x_1, y_1) ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾ $F_1 = F_{11}$.

$F = 0$ ಮೇಲಿರುವ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಜ್ಯಾ $F_1 + F_2 = F_{12}$.

ಶಂಕುಜಗಳ ಶಿಷ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳು—

ದೀರ್ಘವೃತ್ತ : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ b^2 = a^2(1 - e^2),\ e < 1.$

ನಾಭಿಗಳು $(\pm ae, 0)$, ಅನುರೂಪ ಚಾಲಕಗಳು $x = \pm \frac{a}{e}$

ಪ್ಯರಾಬೊಲ : $y^2 = 4ax,\ e = 1$, ನಾಭಿ $(a, 0)$, ಚಾಲಕ $x = -a$

ಹೈಪರ್ಬೋಲ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ b^2 = a^2(e^2 - 1),\ e > 1$ ನಾಭಿಗಳು, ಚಾಲಕಗಳು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದಂತೆ.

ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲ : $xy = c^2$ ಅಥವಾ $x^2 - y^2 = a^2$

$F = 0$ ಯ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು : $F - \frac{\Delta}{ab - h^2} = 0$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಚಾಲಕವೃತ್ತ : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

ಹೈಪರ್ಬೋಲದ ಚಾಲಕವೃತ್ತ ; $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

1.3 Condition that the line $lx+my+n=0$ may touch the conic $F=0$.

Let the point of contact be $P(x_1, y_1)$. Then the tangent at P is

$$x(ax_1+hy_1+g)+y(hx_1+by_1+f)+gx_1+fy_1+c=0$$

This is identical with $lx+my+n=0$

$$\therefore \quad \frac{ax_1+hy_1+g}{l}=\frac{hx_1+by_1+f}{m}=\frac{gx_1+fy_1+c}{n}=\lambda$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad ax_1+hy_1+g-l\lambda &= 0 \\ hx_1+by_1+f-m\lambda &= 0 \\ gx_1+fy_1+c-n\lambda &= 0 \\ \text{Also} \quad lx_1+my_1+n &= 0 \end{aligned}$$

Eliminating x_1, y_1, λ we obtain the required condition

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}$$

Expanding we obtain

$Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm=0$, where A, B, C, F, G, H are the co-factors of the corresponding small letters in the determinant

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

Corollary: Through any point we can draw two tangents to the conic. For, solving between

$$Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm=0$$

$$lx_1+my_1+n=0$$

we obtain two solutions (real or otherwise) for $l:m:n$.

1.4 Homogeneous co-ordinates: Consider the two straight lines

$$L_1 \equiv l_1x+m_1y+n_1 = 0$$
$$L_2 \equiv l_2x+m_2y+n_2 = 0$$

೧.೩ $lx + my + n = 0$ ಸರಳರೇಖೆ $F = 0$ಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ನಿಯಮ

ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ಆಗಿರಲಿ. P ಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ

$$x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) + gx_1 + fy_1 + c = 0$$

ಇದೂ $lx + my + n = 0$ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

$$\therefore \quad \frac{ax_1 + hy_1 + g}{l} = \frac{hx_1 + by_1 + f}{m} = \frac{gx_1 + fy_1 + c}{n} = \lambda$$

$$\therefore \quad ax_1 + hy_1 + g - l\lambda = 0$$

$$hx_1 + by_1 + f - m\lambda = 0$$

$$gx_1 + fy_1 + c - n\lambda = 0$$

ಮತ್ತು $lx_1 + my_1 + n = 0$

x_1, y_1, λ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅದು

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}$$

ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ

$$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2\,Fmn + 2\,Gnl + 2\,Hlm = 0.$$ ಇಲ್ಲಿ

A, B, C, F, G, H ಗಳು

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಆಯಾ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಹಾಪವರ್ತನಗಳು.

ಅನುಮಿತ : ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಬಹುದು.

$$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2\,Fmn + 2\,Gnl + 2\,Hlm = 0$$

$$lx_1 + my_1 + n = 0$$

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $l:m:n$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಎರಡು (ವಾಸ್ತವ ಅಥವಾ ಊಹ್ಯ) ಬಿಡಿಸಿಕೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

೧.೪ ಸಮಾನ ಘಾತೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$L_1 \equiv l_1x + m_1y + n_1 = 0$$

$$L_2 \equiv l_2x + m_2y + n_2 = 0$$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಥವಾ ಛೇದನ ಬಿಂದು

Their common point or point of intersection is

$$\left(\frac{m_1n_2-m_2n_1}{l_1m_2-l_2m_1},\ \frac{n_1l_2-n_2l_1}{l_1m_2-l_2m_1}\right)$$

provided $l_1m_2-l_2m_1 \neq 0$. If $l_1m_2-l_2m_1=0$, then there is no finite point of intersection. In this case we have

$$\frac{l_1}{m_1} = \frac{l_2}{m_2}$$

which shows that the two straight lines are parallel—that is, they have a common direction. We may therefore conclude that two coplanar straight lines have either a common point or a common direction. When they have both, the straight lines coincide and when they have neither, they cease to be coplanar.

Let us now transform the current co-ordinates (x, y) to a new system by writing $x=\frac{X}{Z}$, $y=\frac{Y}{Z}$. Without loss of generality we may assume that X, Z and Y, Z are prime to one another, i.e., $(X, Z)=(Y, Z)=1$. We further assume that $Z\neq 0$. $L_1=0$, $L_2=0$ now become

$$l_1X+m_1Y+n_1Z=0$$
$$l_2X+m_2Y+n_2Z=0$$

These are homogeneous equations in three variables X, Y, Z. The common point of these lines is given by

$(X, Y, Z) \equiv (m_1n_2-m_2n_1,\ n_1l_2-n_2l_1,\ l_1m_2-l_2m_1)$ or any multiple of these.

When the two lines are parallel we have $l_1m_2-l_2m_1=0$ or $Z=0$. If we now remove the restriction $Z\neq 0$ we can at once deal with the points at infinity in an algebraic way as if they are ordinary points. The points at infinity are (X, Y, Z) corresponding to $Z=0$ or simply $(X, Y, 0)$.

The foregoing argument enables us to determine the points at infinity on a curve in an algebraic way. First homogenise the equation by the substitutions $x=\frac{X}{Z}$, $y=\frac{Y}{Z}$. After clearing the denominators put $Z=0$. The resulting equation in X and Y gives the points at infinity on the curve. In effect this amounts

$$\left(\frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{l_1 m_2 - l_2 m_1}, \quad \frac{n_1 l_2 - n_2 l_1}{l_1 m_2 - l_2 m_1}\right)$$

$l_1 m_2 - l_2 m_1 \neq 0$. $l_1 m_2 - l_2 m_1 = 0$ ಆದಾಗ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\frac{l_1}{m_1} = \frac{l_2}{m_2}$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ದಿಶೆಯಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಸಮತಲೀಯ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಒಂದೋ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿದೆ ಅಥವಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ದಿಶೆಯಿದೆ. ಅವುಗಳಿಗೆ ಇವೆರಡೂ ಇದ್ದರೆ ಆ ರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ; ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲವಾದಾಗ ಅವು ಸಮತಲೀಯವಾಗಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ವಿನಿಮಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾದ (x, y) ನ್ನು $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ ಎಂದು ಬರೆದು ಒಂದು ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸೋಣ. ಸಾಮಾನ್ಯತೆಗೆ ಭಂಗ ಬರದಂತೆ X, Z ಮತ್ತು Y, Z ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ, ಅಂದರೆ $(X, Z) = (Y, Z) = 1$ ಎಂದು ಊಹಿಸಬಹುದು. $Z \neq 0$ ಎಂದೂ ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ ಈಗ

$$l_1 X + m_1 Y + n_1 Z = 0$$
$$l_2 X + m_2 Y + n_2 Z = 0$$

ಆಗುವುವು. ಇವು X, Y, Z ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನಘಾತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು $(X, Y, Z) \equiv (m_1 n_2 - m_2 n_1, n_1 l_2 - n_2 l_1, l_1 m_2 - l_2 m_1)$ ಅಥವಾ ಇವುಗಳ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು.

ಈ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಾಗ $l_1 m_2 - l_2 m_1 = 0$ ಅಥವಾ $Z = 0$. $Z \neq 0$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅನಂತದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳೇ ಎನ್ನುವಂತೆ ಬೈಜಿಕವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಬಹುದು. (X, Y, Z), $Z = 0$ ಅನಂತ ಬಿಂದುಗಳು. ಅಥವಾ $(X, Y, 0)$.

ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಅನಂತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬೈಜಿಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಮೇಲಿನ ವಾದ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ. ಮೊದಲು. $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಮಾನಘಾತಿಸಬೇಕು. ಛೇದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದ ಅನಂತರ $Z = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು. X, Y ನಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಸಮೀಕರಣ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಅನಂತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನೀಡುವುದು. ಸಮೀ

to equating the highest degree terms in X and Y in the equation to zero.

The line at infinity is the locus of all points at infinity in the plane. Its equation is $Z=0$ or $1=0$.

Consider the two parallel straight lines $y=mx+c_1$, $y=mx+c_2$. Simultaneous solving between the two equations indicates that the common point recedes to infinity. Now

$$(mx-y+c_1)-(mx-y+c_2)=0$$

represents a straight line passing through the common point of the straight lines. But it is $c_1-c_2=0$ or $1=0$, which is the line at infinity. We may therefore say that parallel lines have a common point at infinity.

1.5 Points at infinity on the circle and the conics.

The points at infinity on the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (1)

are given by

$$x^2+y^2+2\,gxZ+2\,fyZ+cZ^2=0,\ Z=0$$

$$\text{or}\quad x^2+y^2=0$$

$$\therefore\qquad x=\pm iy$$

We take $x=1$, $y=\pm i$. Therefore the circle (1) intersects the line at infinity $Z=0$ in two points $(1, \pm i, 0)$. Let C be the centre of the circle and these points $\omega\ (1, i, 0)$ and $\omega'\ (1, -i, 0)$. Now $C\omega$ and $C\omega'$ are imaginary lines. The co-ordinates of ω and ω' are independent of g, f, c which determine the size and position of the circle. We infer that all circles pass through the same two points on the line at infinity. These points ω and ω' are called circular points at infinity.

Let the conic $F=0$ pass through the circular points at infinity. Then $(1, \pm i, 0)$ lie on

$$ax^2+2hxy+by^2+2gZx+2fyZ+cZ^2=0$$

$$\therefore\quad a\pm 2ih-b=0$$

ಕರಣದಲ್ಲಿರುವ X ಮತ್ತು Y ಗಳಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠಘಾತದ ಪದಗಳ ಭಾಗವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸುವುದು ಇದರ ಪರಿಣಾಮ.

ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಅನಂತದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ ಪಥದ ಹೆಸರು ಅನಂತ ರೇಖೆ. ಇದರ ಸಮೀಕರಣ $Z=0$ ಅಥವಾ $1=0$.

$y=mx+c_1$, $y=mx+c_2$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಅನಂತಕ್ಕೆ ನಿರ್ಗಮಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಏಕಕಾಲಿಕ ಬಿಡಿಸಿಕೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ

$(mx-y+c_1)-(mx-y+c_2)=0$ ಅವೆರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇದು $c_1-c_2=0$ ಅಥವಾ $1=0$. ಇದು ಅನಂತರೇಖೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದು ಅನಂತದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

೧.೫ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಶಂಕುಜಗಳ ಮೇಲಿನ ಅನಂತ ಬಿಂದುಗಳು

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \cdots \quad (1)$$

ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಅನಂತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು

$$x^2+y^2+2gxZ+2fyZ+cZ^2=0,\ Z=0$$

ಅಥವಾ $x^2+y^2=0$ ಕೊಡುತ್ತವೆ.

$$\therefore \quad x=\pm i\,y$$

$x=1$, $y=\pm i$ ಎಂದು ಆರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತ (1) ಅನಂತರೇಖೆ $Z=0$ ಯನ್ನು $(1, \pm i, 0)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ C ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳು $\omega\ (1, i, 0)$, $\omega'\ (1, -i, 0)$ ಆಗಿರಲಿ. $C\omega$, $C\omega'$ ಶೂನ್ಯ ರೇಖೆಗಳು. ω, ω' ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ವೃತ್ತದ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ g, f, c ಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳೂ ಅನಂತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುವು ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ω, ω' ಎಂಬ ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನಂತವೃತ್ತೀಯ ಬಿಂದುಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$F=0$ ಶಂಕುಜ ಅನಂತವೃತ್ತೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗಲಿ. ಆಗ $(1, \pm i, 0)$ ಬಿಂದುಗಳು

$$ax^2+2hxy+by^2+2gZx+2fyZ+cZ^2=0$$ ಯ ಮೇಲೆ ಇವೆ.

$$\therefore \quad a\pm 2ih-b=0$$

$$\therefore \quad a-b=0, \quad h=0$$

$$\therefore \quad F=0 \text{ is a circle.}$$

Therefore every conic passing through the circular points at infinity is a circle.

The intersections of the conic F=0 with the line at infinity are given by

$$ax^2+2hxy+by^2+2gZx+2fyZ+cZ^2=0, \ Z=0$$

$$\text{or} \quad ax^2+2hxy+by^2=0$$

These are real and distinct; or coincident; or imaginary according as $h^2-ab \gtrless$ or <0; that is, according as the conic is a hyperbola or a parabola or an ellipse. Thus a hyperbola intersects the line at infinity in two distinct points; a parabola touches it and an ellipse cuts it in two imaginary points.

Let I and J be the points of intersection of F=0 with the line at infinity. Then $ax^2+2hxy+by^2 \equiv b\,(y-m_1x)\,(y-m_2x)=0$

$$m_1+m_2=-\frac{2h}{b}, \quad m_1m_2=\frac{a}{b}$$

give the co-ordinates of I and J. The homogeneous co-ordinates of these points are I$(1, m_1, 0)$, J$(1, m_2, 0)$. Since the co-ordinates of I and J depend upon a, b, and h these points are in general different for different conics.

1.6 Conics through five given points.

The general equation of a conic, *viz.*,

$$F \equiv ax^2+2\,hxy+by^2+2\,gx+2\,fy+c=0$$

has five independent ratios $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{f}{c}, \frac{g}{c}, \frac{h}{c}$ as co-efficients. Five independent linear equations in x and y are sufficient to determine these coefficients. Therefore, in general, a unique conic can be made to pass through five given points.

1.7 Conic and a straight line. The common points of F=0 and a straight line L=0 are obtained by solving between

$$\therefore \quad a-b=0, \quad h=0$$

$\therefore$ $F=0$ ಒಂದು ವೃತ್ತ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅನಂತವೃತ್ತೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಂಕುಜವೂ ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಅನಂತರೇಖೆ $Z=0$ ಮತ್ತು ಶಂಕುಜ $F \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gZx+2fyZ+cZ^2=0$ ಇವುಗಳ ಭೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $ax^2+2hxy+by^2=0$ ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇವು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ; ಅಥವಾ ಐಕ್ಯ ; ಅಥವಾ ಊಹ್ಯ $h^2-ab \gtrless$ ಅಥವಾ <0 ಯಂತೆ, ಅಂದರೆ ಶಂಕುಜ ಹೈಪರ್ಬೋಲ ಅಥವಾ ಪ್ಯರಾಬೊಲ ಅಥವಾ ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತವಂತೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೈಪರ್ಬೋಲ ಅನಂತರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವುದು ; ಪ್ಯರಾಬೊಲ ಅದನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು ; ಮತ್ತು ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತ ಅದನ್ನು ಎರಡು ಊಹ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವುದು.

ಅನಂತರೇಖೆ ಮತ್ತು $F=0$ ಗಳ ಭೇದನ ಬಿಂದುಗಳು I ಮತ್ತು J ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $ax^2+2hxy+by^2 \equiv b(y-m_1x)(y-m_2x)=0$

$$\therefore \quad m_1+m_2=-\frac{2h}{b}, \quad m_1m_2=\frac{a}{b}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ I ಮತ್ತು J ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮಾನ ಘಾತೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು I $(1, m_1, 0)$ ಮತ್ತು J $(1, m_2, 0)$. ಇವು a, b, h ಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ I, J ಬಿಂದುಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ.

೧.೬ ಐದು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಶಂಕುಜ

ಶಂಕುಜದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$F \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ಇದರಲ್ಲಿ $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{f}{c}$, $\frac{g}{c}$, $\frac{h}{c}$ ಎಂಬ ಐದು ಸ್ವತಂತ್ರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳಿವೆ. x, y ಗಳಲ್ಲಿ ಐದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಮತ್ತು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಐದು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು.

೧.೭ ಶಂಕುಜ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆ

ಶಂಕುಜ $F=0$ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆ $L=0$ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಒಂದು ಚರವನ್ನು

the two equations. Eliminating one of the variables we get a quadratic in the other variable. It has two roots in general. This shows that $F=0$, $L=0$ have two common points. These points may be real and distinct, coincident or imaginary. The discriminant of the quadratic determines the nature of the common points.

The equation $F+\lambda L=0$, where λ is an arbitrary constant representing a conic passing through the common points of $F=0$, $L=0$. As λ takes different values we get a system of conics having $L=0$ as their common chord.

Example: Prove that the polars of a given point with respect to a system of conics having a common chord pass through a fixed point.

The polar of any point (x_1, y_1) for the system

$F+\lambda L \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$ is $F_1+\lambda L_1=0$. Evidently this represents a system of straight lines passing through the common point of the straight lines $F_1=0$, $L_1=0$.

1.8 A pair of conics. Let $F=0$, $F'=0$ be two conics. Eliminating any one of the variables between them we get a quartic in the other variable. Therefore two conics intersect in general in four points. Depending upon the roots of the quartic the following cases arise:

(*i*) all the common points are real and distinct;

(*ii*) two real and distinct; two real and coincident;

(*iii*) coincident points in pairs;

(*iv*) all the points coincident;

(*v*) two real, distinct and two imaginary;

(*vi*) two real, coincident and two imaginary;

(*vii*) three real, coincident and one real;

(*viii*) all the points imaginary.

ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಲಭಿಸುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿವೆ. ಇದರಿಂದ $F=0$, $L=0$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಇವು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ, ಐಕ್ಯ ಅಥವಾ ಊಹ್ಯ ಆಗಿರಬಹುದು. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕ ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ.

$F=0$ ಮತ್ತು $L=0$ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಶಂಕುಜವನ್ನು $F+\lambda L=0$ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ λ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ. λದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾದಂತೆ $F+\lambda L=0$ ಯು $L=0$ ಸಾಮಾನ್ಯಜ್ಯಾ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಶಂಕುಜ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ನೀಡುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : ಸಾಮಾನ್ಯಜ್ಯಾ ಇರುವ ಒಂದು ಶಂಕುಜ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯುಗಳು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$F+\lambda L \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$$

ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕುರಿತು (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯ $F_1+\lambda L_1=0$. ಇದು λದ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $F_1=0$, $L_1=0$ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಸ್ಥಿರ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ.

೧.೮ ಒಂದು ಜೊತೆ ಶಂಕುಜಗಳು

$F=0$, $F'=0$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಶಂಕುಜಗಳಾಗಿರಲಿ. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಚರವನ್ನು ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚರದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತದ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಶಂಕುಜಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಒದಗುತ್ತವೆ :

(*i*) ಎಲ್ಲ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳೂ ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ;
(*ii*) ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ; ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಐಕ್ಯ ;
(*iii*) ಒಂದು ಜೊತೆ ಐಕ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ;
(*iv*) ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳೂ ಐಕ್ಯ ;
(*v*) ಎರಡು ವಾಸ್ತವ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮತ್ತು ಎರಡು ಊಹ್ಯ ;
(*vi*) ಎರಡು ವಾಸ್ತವ, ಐಕ್ಯ ಮತ್ತು ಎರಡು ಊಹ್ಯ ;
(*vii*) ಮೂರು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಐಕ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ;
(*viii*) ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳೂ ಊಹ್ಯ.

The general equation to the system of conics passing through the common points of $F=0$, $F'=0$ is $F+\lambda F'=0$, where λ is an arbitrary constant.

Example: Find the condition that the common points of two conics may be concyclic.

Choose λ such that $F+\lambda F'=0$ is a circle.

$$\therefore \quad a+\lambda a'=b+\lambda b'$$

$$h+\lambda h'=0$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{a'-b'}=\frac{h}{h'} \quad (=-\lambda)$$

By substituting this value of λ in $F+\lambda F'=0$, we can obtain the equation to the circle.

1.9 Centre of a conic. The centre of a conic when it exists is a point C which is the middle point of all chords passing through C and terminated by the conic. Let us suppose that the origin is the centre of the conic $F=0$. Let $P(x_1, y_1)$ be any point on the conic. Then its diametrically opposite point $Q(-x_1, -y_1)$ is also a point on the conic.

$$\therefore \quad ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2-2gx_1-2fy_1+c=0$$

$$\therefore \quad gx_1+fy_1=0$$

This should be true for all points on $F=0$. Therefore it is an identity. Hence $g=f=0$. Thus for a conic whose centre is at the origin the first degree terms do not exist. We shall use this property to find out the centre of the general conic $F=0$.

Let $C(x_1, y_1)$ be its centre. Give a parallel transformation to the axes to the point C. If the new current co-ordinates are X, Y the transformation equations are

$F=0$, $F'=0$ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಶಂಕುಜ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ $F+\lambda F'=0$. λ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಎರಡು ಶಂಕುಜಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯ ವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$F+\lambda F'=0$ ವೃತ್ತವಾಗಿರುವಂತೆ λ ಆರಿಸಿ.

$$\therefore \quad a+\lambda a'=b+\lambda b'$$

$$h+\lambda h'=0$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{a'-b'}=\frac{h}{h'} \ (=-\lambda)$$

$F+\lambda F'=0$ ಯಲ್ಲಿ λ ದ ಬೆಲೆ ಆದೇಶಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ ಪಡೆಯಬಹುದು.

೧.೯ ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರ

ಒಂದು ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ C ಎಂಬ ಒಂದು ಕೇಂದ್ರವಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು ಶಂಕುಜದಿಂದ ಪರಿಮಿತವಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು C ಆಗುವುದು. $F=0$ ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರ ಮೂಲಬಿಂದು ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಅದರ ವ್ಯಾಸೀಯ ವಿರುದ್ಧ ಬಿಂದು $Q(-x_1, \ -y_1)$ ಸಹ ಶಂಕುಜದ ಮೇಲಿದೆ.

$$\therefore \quad ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

ಮತ್ತು $ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2-2gx_1-2fy_1+c=0$

$$\therefore \quad gx_1+fy_1=0$$

ಇದು $F=0$ ಯ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದೊಂದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ. ಆದ್ದರಿಂದ $g=f=0$. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಶಂಕುಜದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಪದಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ. $F=0$ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

$C\ (x_1, \ y_1)$ ಅದರ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಿ. ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು C ಬಿಂದುವಿಗೆ ನೀಡಬೇಕು. ಹೊಸ ಚಾಲ್ತಿ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು X, Y ಆಗಿದ್ದರೆ

$$x = x_1 + X$$
$$y = y_1 + Y$$

The transformed equation is

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2\,(ax_1 + hy_1 + g)X + 2\,(gx_1 + fy_1 + c)Y$$
$$+ x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0 \quad (1)$$

Since the (new) origin is the centre of this conic, we have

$$ax_1 + hy_1 + g = 0$$
$$hx_1 + by_1 + f = 0$$

The co-ordinates of the centre are given by

$$x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2},\quad y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

The transformed equation (1) becomes

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + gx_1 + fy_1 + c = 0$$

Or, $aX^2 + 2hXY + bY^2 + \dfrac{\Delta}{ab - h^2} = 0$

where $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

Therefore the standard form of a central conic with reference to its centre as origin is $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 1$.

Note: 1. The equations to determine the centre are

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

2. The centre is finite provided that $ab - h^2 \neq 0$, that is when the conic is not a parabola. The ellipse and the hyperbola which have finite centres are called the central conics. The parabola is a noncentral conic. Algebraically, since $ab - h^2 = 0$ for a parabola, its centre is at infinity.

$$x = x_1 + X$$

$$y = y_1 + Y$$

ಇವು ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮೀಕರಣ :

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2(ax_1 + hy_1 + g)X + 2(gx_1 + fy_1 + c)Y$$
$$+ x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0 \quad (1)$$

ಹೊಸ ಮೂಲಬಿಂದು ಈ ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$ax_1 + hy_1 + g = 0$$

$$hx_1 + by_1 + f = 0$$

ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು

$$x_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2}, \quad y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮೀಕರಣ (1) ಈಗ

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$$ ಆಗುವುದು.

ಅಥವಾ, $aX^2 + 2hXY + bY^2 + \dfrac{\Delta}{ab - h^2} = 0$

ಇಲ್ಲಿ $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೇಂದ್ರವು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜದ ಸುಲಭ ಸಮೀಕರಣ $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಸೂಚನೆ: 1. ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

2. $ab - h^2 \neq 0$ ಆದಾಗ ಕೇಂದ್ರ ಪರ್ಯಾಪ್ತ (ಅಂದರೆ ಶಂಕುಜ ಪ್ಯರಾಬೊಲ ಅಲ್ಲದಾಗ). ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳಿರುವ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್ಬೋಲಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ಯರಾಬೊಲ ಒಂದು ನಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜ. ಬೈಜಿಕವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಪ್ಯರಾಬೊಲಕ್ಕೆ $ab - h^2 = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಕೇಂದ್ರ ಅನಂತದಲ್ಲಿದೆ.

3. If $hf-bg=gh-af=0$ and $ab-h^2\neq 0$, the origin is the centre. In this case $x_1=y_1=0$.

Now $$hf\times gh=bg\times af$$

$$\therefore\ fg\,(ab-h^2)=0$$

Now $$ab-h^2\neq 0$$

$$\therefore\ fg=0$$

It is easy to see that $f=g=0$.

4. If $hf-bg=gh-af=ab-h^2=0$, the conic degenerates into a pair of parallel straight lines.

5. Let C (x_1, y_1) be the centre of $F=0$. Then $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=r$ is a diameter. The algebraic distances of the extremities of the diameter through C are given by the quadratic in r

$$(al^2+2hlm+bm^2)\,r^2+\left(l\,\frac{\partial F}{\partial x_1}+m\,\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)r+F_{11}=0$$

The two roots r_1 and r_2 satisfy the condition $r_1=-r_2$ or $r_1+r_2=0$.

$$\therefore\ l\,\frac{\partial F}{\partial x_1}+m\,\frac{\partial F}{\partial y_1}=0$$

This should be true for all diameters, that is for all values of l and m.

$$\therefore\ \frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{\partial F}{\partial y_1}=0.$$

These equations determine the centre of $F=0$.

Example: The centre of the conic $x^2-xy+y^2+4x-5y-2=0$ is given by

$$2x_1-y_1+4=0$$
$$-x_1+2y_1-5=0$$

Its co-ordinates are $(-1, 2)$. The transformed equation is $[x=-1+X,\ y=2+Y]$

$$X^2-XY+Y^2-9=0$$

3. $hf-bg=gh-af=0$ ಮತ್ತು $ab-h^2\neq 0$ ಆಗಿರುವಾಗ ಮೂಲಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $x_1=y_1=0$. ಈಗ $hf \cdot gh=bg \cdot af$

$$\therefore \quad fg(ab-h^2)=0$$

ಆದರೆ $ab-h^2\neq 0$

$$\therefore \quad fg=0$$

ಇಲ್ಲಿ f ಮತ್ತು g ಎರಡೂ ಶೂನ್ಯ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

4. $hf-bg=gh-af=ab-h^2=0$ ಆಗುವಾಗ ಶಂಕುಜ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಾಗಿ ವಿಕೃತಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

5. C (x_1, y_1) ಬಿಂದು $F=0$ ಯ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=r$ ಒಂದು ವ್ಯಾಸ. C ಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ವ್ಯಾಸದ ಕೊನೆಗಳ ದೂರಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ

$$(al^2+2\,hlm+bm^2)r^2+\left(l\frac{\partial F}{\partial x_1}+m\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)r+F_{11}=0.$$

ಇದರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಾದ r_1, r_2 ಗಳು $r_1=-r_2$ ಅಥವಾ $r_1+r_2=0$ ಎಂಬ ನಿಯಮದಿಂದ ಬಂಧಿತವಾಗಿವೆ.

$$\therefore \quad l\frac{\partial F}{\partial x_1}+m\frac{\partial F}{\partial y_1}=0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣ ಎಲ್ಲ ವ್ಯಾಸಗಳಿಗೂ, ಅಂದರೆ l ಮತ್ತು m ಗಳ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ, ತಾಳೆಯಾಗಬೇಕು.

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{\partial F}{\partial y_1}=0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು $F=0$ ಯ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $x^2-xy+y^2+4\,x-5\,y-2=0$

ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು $2\,x_1-y_1+4=0$

$$-x_1+2y_1-5=0$$

ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು : $(-1,\ 2)$. ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮೀಕರಣ : $[\,x=-1+X,\ y=2+Y\,]$

$$X^2-XY+Y^2-9=0.$$

1.10 Asymptotes of a conic. The tangents at infinity to a conic are called the asymptotes. We have seen that the homogeneous co-ordinates of the points at infinity of $F=0$ are $I(1, m_1, 0)$, $J(1, m_2, 0)$, where $m_1+m_2=\frac{-2h}{b}$, $m_1m_2=\frac{a}{b}$. The combined equation to the tangents at I and J is

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+m_1\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}+m_2\frac{\partial F}{\partial y}\right)=0$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+(m_1+m_2)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+m_1m_2\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2=0$$

$$\therefore \quad b\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2-2h\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+a\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2=0$$

This is the combined equation to the asymptotes of $F=0$. It satisfies the equations to the centre, viz., $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$. Therefore the asymptotes intersect at the centre of the conic. They are the tangents from the centre to the conic. Since these tangents touch the conic at I and J, IJ (the line at infinity) is the chord of contact of tangents from (or the polar of) the centre C.

This can be verified easily. The chord of contact of $C(x_1, y_1)$ is

$$(ax_1+hy_1+g)x+(hx_1+by_1+f)y+(gx_1+fy_1+c)=0$$

But $\quad ax_1+hy_1+g=hx_1+by_1+f=0$

$\therefore \quad gx_1+fy_1+c=0$

$\therefore \quad 1=0$

This is the line at infinity.

The centre of the conic is the pole of the line at infinity.

1.11 On the form of the equation to the asymptotes. For the central conic $ax^2+2hxy+by^2=1$ (centre is origin), the combined equation to the asymptotes is $ax^2+2hxy+by^2=0$.

೧.೧೦ ಶಂಕುಜದ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು

ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಅನಂತದಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಹೆಸರು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. $F=0$ ಮೇಲಿನ ಅನಂತ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮಘಾತೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $I(1, m_1, 0)$, $J(1, m_2, 0)$ ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $m_1+m_2=\frac{-2h}{b}$, $m_1m_2=\frac{a}{b}$. I ಮತ್ತು J ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+m_1\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}+m_2\frac{\partial F}{\partial y}\right)=0$$

$$\therefore\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+(m_1+m_2)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+m_1m_2\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2=0$$

$$\therefore\quad b\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2-2h\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+a\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2=0$$

ಇದು $F=0$ ಯ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ. ಇದು ಕೇಂದ್ರದ ಸಮೀಕರಣಗಳಾದ $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$ ಇವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಶಂಕುಜವನ್ನು I ಮತ್ತು J ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ IJ (ಅನಂತರೇಖೆ) ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಜ್ಯಾ (ಅಥವಾ ಧ್ರುವೀಯ).

ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು. $C(x_1, y_1)$ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಜ್ಯಾ

$$(ax_1+hy_1+g)x+(hx_1+by_1+f)y+(gx_1+fy_1+c)=0$$

ಅದರೆ $ax_1+hy_1+g=hx_1+by_1+f=0$

$$\therefore\quad gx_1+fy_1+c=0$$

$$\therefore\quad 1=0$$

ಇದು ಅನಂತ ರೇಖೆ. ಕೇಂದ್ರ ಅನಂತ ರೇಖೆಯ ಧ್ರುವ.

೧.೧೧ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪ

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜ $ax^2+2hxy+by^2=1$ (ಮೂಲಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರ) ಇದರ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ $ax^2+2hxy+by^2=0$. ಇವೆರಡು

These equations differ by a constant. Further, the asymptotes are a pair of straight lines. We use this property to determine the equation to the asymptotes of $F=0$. Let $F+\lambda=0$ (λ a constant) represent the asymptotes. λ is chosen such that this equation represents a pair of lines. The condition is

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = -\frac{\Delta}{ab-h^2}$$

$$\therefore \quad F - \frac{\Delta}{ab-h^2} = 0 \text{ is the required equation.}$$

Example: The asymptotes of the conic $x^2+3xy+2y^2-y+2=0$ are obtained as follows.

$$\Delta = -\tfrac{3}{4}, \quad ab-h^2 = -\tfrac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \text{Asymptotes} \quad x^2+3xy+2y^2-y+2-3=0$$

$$\therefore \quad (x+y-1)(x+2y+1)=0$$

The separate equations are

$$x+y-1=0, \quad x+2y+1=0.$$

An alternative method would be to find the centre and then write the combined equation to the pair of tangents from the centre.

1.12 Joachimsthal's ratio equation. Let the join of $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ meet $F=0$ in L. If $PL:LQ=\lambda:1$ then the co-ordinates of L are $\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)$.

Since L lies on $F=0$, we have

$$F_{22}\lambda^2 + 2F_{12}\lambda + F_{11} = 0 \qquad \dots \quad (1)$$

This is called Joachimsthal's ratio equation. It is a quadratic in λ. It shows that PQ intersects the conic in two points. Let M

ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ; ಮತ್ತು ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು. ಈ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು $F=0$ ಶಂಕುಜದ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. $F+\lambda=0$ (λ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ) ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. ಈ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ λ ವನ್ನು ಆರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ನಿಯಮ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{-\Delta}{ab-h^2}$$

$$\therefore \quad F - \frac{\Delta}{ab-h^2} = 0 \quad \text{ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ.}$$

ಉದಾಹರಣೆ : $x^2+3xy+2y^2-y+2=0$ ಶಂಕುಜದ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\Delta = -\tfrac{3}{4}, \quad ab-h^2 = -\tfrac{1}{4}$$

$\therefore$ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $x^2+3xy+2y^2-y+2-3=0$

$$\therefore \quad (x+y-1)(x+2y+1)=0$$

ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x+y-1=0$, $x+2y+1=0$. ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣ ಬರೆಯುವುದು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನ.

೧.೧೨ ಯೋಕಿಮ್‌ಸ್ಥಾಲನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಸಮೀಕರಣ

$P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಗಳ ಜೋಡಣೆ $F=0$ ಯನ್ನು L ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. $PL : LQ = \lambda : 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ L ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು : $\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)$. L ಬಿಂದು $F=0$ ಯ ಮೇಲೆ ಇರುವುದರಿಂದ

$$F_{22}\lambda^2+2F_{12}\lambda+F_{11}=0 \qquad \dots \quad (1)$$

ಇದರ ಹೆಸರು ಯೋಕಿಮ್‌ಸ್ಥಾಲನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಸಮೀಕರಣ. ಇದು λ ದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ. PQ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದೆಂದು

be the other point of intersection. If λ_1, λ_2, be the roots o (1) then we have,

$$\frac{PL}{LQ}=\lambda_1, \quad \frac{PM}{MQ}=\lambda_2$$

1.13 Pole and polar. If a range of four points A, B, C, D is such that B and D divide AC harmonically, then it is called a harmonic range. We have $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$

$$\therefore \quad \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC}=1$$

$$\therefore \quad \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}=-1$$

We write this as $(ABCD)=-1$ or $(AC, BD)=-1$.

D is called the harmonic conjugate of B with respect to AC and *vice versa*. A similar property holds good for A and C with respect to BD.

Take a fixed point P and draw any number of secants to intersect the conic $F=0$ in L_1, M_1; L_2, M_2; L_3, M_3; etc. Choose points Q_1, Q_2, Q_3, etc., on these secants such that $(PQ, LM)=-1$ for each secant. Thus the Q's are the harmonic conjugates of P for LM's . Adverting to Joachimsthal's ratio equation we have $P(x_1, y_1)$ fixed; $Q(x_2, y_2)$ variable subject to the condition $(PQ, LM)=-1$.

$$\therefore \quad \frac{PL}{LQ}=-\frac{PM}{MQ}$$

$$\therefore \quad \lambda_1=-\lambda_2$$

$$\therefore \quad \lambda_1+\lambda_2=0$$

$$\therefore \quad F_{12}=0$$

ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಎರಡನೆಯ ಛೇದನ ಬಿಂದು M ಆಗಿರಲಿ. (1) ರ ಮೂಲಗಳು λ_1, λ_2 ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\frac{PL}{LQ}=\lambda_1, \quad \frac{PM}{MQ}=\lambda_2$$

೧.೧೩ ಧ್ರುವ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ

ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ A, B, C, D ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ B ಮತ್ತು D ಗಳು AC ಯನ್ನು ಸಂಗತವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆ ಸಾಲನ್ನು ಸಂಗತ ಸಾಲು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$

$$\therefore \quad \frac{AB\cdot CD}{AD\cdot BC}=+1$$

$$\therefore \quad \frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}=-1$$

ಇದನ್ನು $(A\,B\,C\,D)=-1$ ಅಥವಾ $(AC,\ BD)=-1$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. AC ಯನ್ನು ಕುರಿತು B ಯ ಸಂಗತ ಅನುವರ್ತಿ D, ಅದೇ ರೀತಿ Dಯ ಸಂಗತ ಅನುವರ್ತಿ B. BDಯನ್ನು ಕುರಿತು A ಮತ್ತು C ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಗತ ಅನುವರ್ತಿಗಳು.

P ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಮೂಲಕ ಹಲವಾರು ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇವು $F=0$ ಶಂಕುಜವನ್ನು L_1, M_1 ; L_2, M_2 ; L_3, M_3 ; ಇತ್ಯಾದಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈ ಛೇದಕಗಳ ಮೇಲೆ Q_1, Q_2, Q_3 ಇತ್ಯಾದಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಛೇದಕಕ್ಕೂ $(PQ,\ LM)=-1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಆರಿಸಬೇಕು. ಆಗ LM ಗಳನ್ನು ಕುರಿತು P ಯ ಸಂಗತ ಅನುವರ್ತಿಗಳು Q ಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಯೋಕಿಮ್‌ಸ್ಥಾಲನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $P(x_1,\ y_1)$ ಸ್ಥಿರಬಿಂದು ; $Q(x_2,\ y_2)$ ಬಿಂದು $(PQ,\ LM)=-1$ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \frac{PL}{LQ}=-\frac{PM}{MQ}$$

$$\therefore \quad \lambda_1=-\lambda_2$$

$$\lambda_1+\lambda_2=0$$

$$\therefore \quad F_{12}=0$$

i.e., $ax_1x_2+h(x_1y_2+x_2y_1)+by_1y_2+g(x_1+x_2)$
$+f(y_1+y_2)+c=0$

$\therefore$ Locus of Q is $axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)$
$+f(y+y_1)+c=0$

i.e., $F_1=0$

This is a straight line. It is called the polar of P for the conic; P is called the pole of this line.

Note: 1. If the polar of A passes through B then the polar of B passes through A. Two such points are called a pair of conjugate points for the conic.

2. If the pole of a straight line L=0 lies on another straight line M=0 then the pole of M=0 lies on L=0. Two such lines are called a pair of conjugate lines for the conic.

Example: Find the locus of the poles of normal chords of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

The normal at θ is

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2 \qquad \cdots (1)$$

Let P (x_1, y_1) be the poles of (1). The polar of P is

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad \cdots (2)$$

(1) and (2) are identical

$$\therefore \frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{a}{\cos\theta}}=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{-b}{\sin\theta}}=\frac{1}{a^2-b^2}$$

Eliminating θ we get the locus to be

$$\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}=(a^2-b^2)^2$$

ಅಂದರೆ, $ax_1x_2+h(x_1y_2+x_2y_1)+by_1y_2+g(x_1+x_2)$
$+f(y_1+y_2)+c=0$

$\therefore$ Q ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ $axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1$
$+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

ಅಂದರೆ, $F_1=0$.

ಇದೊಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಇದರ ಹೆಸರು ಶಂಕುಜವನ್ನು ಕುರಿತು P ಯ ಧ್ರುವೀಯ. ಈ ರೇಖೆಯ ಧ್ರುವ P.

ಸೂಚನೆ : 1. A ಯ ಧ್ರುವೀಯ B ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ B ಯ ಧ್ರುವೀಯ A ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ಇಂಥ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

2. $L=0$ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಧ್ರುವ $M=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ $M=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಧ್ರುವ $L=0$ ಮೇಲಿರುವುದು. ಇಂಥ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾಹರಣೆ : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಲಂಬಜ್ಯಾಗಳ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

θ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಜ್ಯಾದ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2 \qquad \cdots \quad (1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಧ್ರುವ $P(x_1, y_1)$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ P ಯ ಧ್ರುವೀಯ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಸರ್ವಸಮವಾಗಿವೆ.

$$\therefore \quad \frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{a}{\cos\theta}}=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{-b}{\sin\theta}}=\frac{1}{a^2-b^2}$$

θ ವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ $\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}=(a^2-b^2)^2$

ಇದೇ ಬೇಕಾದ ಪಥ.

1.14 Diameters of a conic. All straight lines passing through the centre of a conic are called its diameters. The portion of a diameter intercepted by the curve is the length of that diameter. The number of diameters of a central conic is infinite. In the case of a parabola since the centre is at infinity the diameters form a set of parallel lines all parallel to the axis.

The condition that $L \equiv lx+my+n=0$ should be a diameter of $F=0$ is that the centre of the conic must be on $L = 0$

$$\therefore \quad l(hf-bg)+m\,(gh-af)+n(ab-h^2) = 0$$

$$ab-h^2 \neq 0$$

The centre of $F = 0$ is given by $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0.$

$\therefore \quad \lambda \dfrac{\partial F}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ represents the diameters of $F=0$ for different values of λ and μ.

Two diameters of $F=0$ form a pair of conjugate diameters if the pole of the one lies on the other. Let

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial x} + \mu \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\lambda' \frac{\partial F}{\partial x} + \mu' \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \cdots \quad (2)$$

be a pair of conjugate diameters of $F=0$. Therefore the pole of either lies on the other. Let $P\,(x_1, y_1)$ be the pole of (1). Then $F_1=0$ and (1) are identical.

$$\therefore \quad x\,(a\lambda + h\mu) + y\,(h\lambda + b\mu) + (g\lambda + f\mu) = 0 \quad (1)$$

and $x \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + y \dfrac{\partial F}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \omega_1} = 0$ are identical.

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{a\lambda+h\mu} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y_1}}{h\lambda+b\mu} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \omega_1}}{g\lambda+f\mu} \qquad \cdots \quad (3)$$

೧.೧೪ ಶಂಕುಜದ ವ್ಯಾಸಗಳು

ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕಾಗಿ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳೂ ಅದರ ವ್ಯಾಸಗಳು. ಶಂಕುಜದ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಸೀಮಿತಗೊಂಡ ವ್ಯಾಸದ ವಿಭಾಗ ಆ ವ್ಯಾಸದ ಉದ್ದ. ಒಂದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜದ ವ್ಯಾಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನಂತ. ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಕೇಂದ್ರ ಅನಂತದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ವ್ಯಾಸಗಳು ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ಗಣ.

$L \equiv lx + my + n = 0$ ಸರಳರೇಖೆ $F = 0$ ಶಂಕುಜದ ವ್ಯಾಸವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರಬೇಕು.

$$\therefore \quad l(hf - bg) + m(gh - af) + n(ab - h^2) = 0$$

$$ab - h^2 \neq 0$$

$F = 0$ ಯ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕೊಡುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$\therefore \quad \lambda \dfrac{\partial F}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣ λ, μ ಗಳ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $F = 0$ ಯ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತದೆ.

$F = 0$ ಶಂಕುಜದ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ ಒಂದರ ಧ್ರುವ ಇನ್ನೊಂದರ ಮೇಲೆ ಇರಬೇಕು.

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial x} + \mu \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\lambda' \frac{\partial F}{\partial x} + \mu' \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \cdots \quad (2)$$

ಇವು $F = 0$ ಶಂಕುಜದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಧ್ರುವ ಇನ್ನೊಂದರ ಮೇಲಿರುವುದು. $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದು (1)ರ ಧ್ರುವವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $F_1 = 0$ ಮತ್ತು (1) ಸರ್ವಸಮ.

$$\therefore \quad x(a\lambda + h\mu) + y(h\lambda + b\mu) + g\lambda + f\mu = 0 \qquad \cdots \quad (1)$$

ಮತ್ತು $x \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + y \dfrac{\partial F}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \omega_1} = 0$ ಸರ್ವಸಮ.

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{a\lambda + h\mu} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y_1}}{h\lambda + b\mu} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \omega_1}}{g\lambda + f\mu} \qquad \cdots \quad (3)$$

P lies on (2). $\therefore\ \lambda' \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \mu' \dfrac{\partial F}{\partial y_1} = 0$ ... (4)

Eliminating $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}$ and $\dfrac{\partial F}{\partial y_1}$ between (3) and (4) we get $\mu'(\lambda b + \mu b) + \lambda'(a\lambda + b\mu) = 0.$

$$\therefore\ \lambda\lambda' a + \mu\mu' b + b(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0 \qquad .... \quad (5)$$

This condition is symmetrical in λ, μ, λ' and μ'. Therefore the pole of the second diameter lies on the first diameter.

Consider a chord of $F=0$, which is parallel to (1). If the midpoint of the chord be P (x_1, y_1) then its equation is $F_1 = F_{11}$.

$$\therefore\ x \frac{\partial F}{\partial x_1} + y \frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial \omega 1} - 2F_{11} = 0$$

The gradient of this chord is $-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_1}}$

But it is equal to $-\dfrac{\lambda a + \mu b}{\lambda b + \mu b}$, because $F_1 = F_{11}$ is parallel to (1). From (5)

$$-\frac{\lambda a + \mu b}{\lambda b + \mu b} = \frac{\mu'}{\lambda'}$$

$$\therefore\ -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_1}} = \frac{\mu'}{\lambda'}$$

$$\therefore\ \lambda' \frac{\partial F}{\partial x_1} + \mu' \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

$\therefore$ Locus of P (x_1, y_1) is $\lambda' \dfrac{\partial F}{\partial x} + \mu' \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$. But this is the second diameter, i.e., conjugate to the given diameter. Therefore the locus of the midpoints of a set of chords parallel

P ಬಿಂದು (2)ರ ಮೇಲಿದೆ. $\therefore \quad \lambda' \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \mu' \dfrac{\partial F}{\partial y_1} = 0 \qquad \cdots \quad (4)$

(3) ಮತ್ತು (4) ರಲ್ಲಿ $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F}{\partial y_1}$ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ

$$\mu'(h\lambda + b\mu) + \lambda'(\lambda a + \mu h) = 0$$

$$\therefore \quad \lambda\lambda' a + \mu\mu' b + h(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0 \qquad \cdots \quad (5)$$

ಈ ನಿಯಮ λ, μ, λ' ಮತ್ತು μ' ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ವ್ಯಾಸವ ಧ್ರುವ ಮೊದಲನೆಯದರ ಮೇಲಿದೆ.

(1) ಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ F=0 ಯ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಈ ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಜ್ಯಾ ಸಮೀಕರಣ $F_1 = F_{11}$.

$$\therefore \quad x \frac{\partial F}{\partial x_1} + y \frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial \omega_1} - 2F_{11} = 0$$

ಈ ಜ್ಯಾದ ಓಟ $-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_1}}$. $F_1 = F_{11}$ (1)ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು $-\dfrac{\lambda a + \mu h}{\lambda h + \mu b}$ ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. (5) ರಿಂದ

$$-\frac{\lambda a + \mu h}{\lambda h + \mu b} = \frac{\mu'}{\lambda'}$$

$$\therefore \quad -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_1}} = \frac{\mu'}{\lambda'}$$

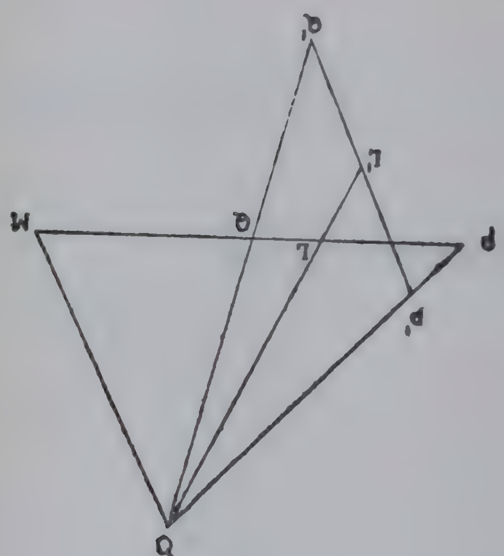
$$\lambda' \frac{\partial F}{\partial x_1} + \mu' \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

$$\therefore \quad P(x_1, y_1) \text{ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ } \lambda' \frac{\partial F}{\partial x} + \mu' \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

ಆದರೆ ಇದು ಎರಡನೆಯ ವ್ಯಾಸ, ಅಂದರೆ ದತ್ತ ವ್ಯಾಸದ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ದತ್ತ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಆ

to a given diameter is another diameter conjugate to the first or, two conjugate diameters are such that each bisects the chords parallel to the other.

1.15 Conjugate diameters and asymptotes: When L, M divide PQ harmonically (PQ. LM) = −1. L, M are the harmonic conjugates with respect to PQ and *vice versa*. The two pairs of points P, Q and L, M are said to be mutually apolar. If the four points P, L, Q, M be joined to any point O (not lying on the line PLQM), the lines OP, OL, OQ, OM are said to form a harmonic pencil. This we write as O(PQ,LM) = −1. Here the rays OL, OM are called the harmonic conjugates of OP, OQ and *vice versa*. The pairs of lines OP, OQ and OL, OM are said to be mutually apolar. The student should prove that a harmonic pencil forms a harmonic range on any transversal. Taking a transversal P′ L′ Q′ parallel to one of the rays (say OM) we have (P′Q′, L′ ∞) = −1. This can happen only when L′ is the midpoint of P′Q′.

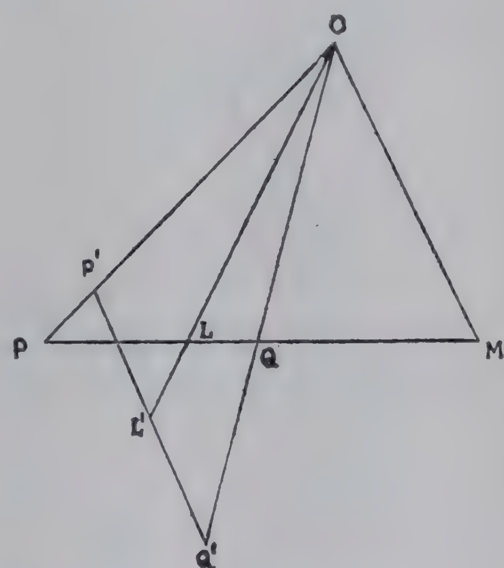


Choose O as the origin. Let the equations to the four lines OP, OQ, OL, OR be respectively

ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅನುವರ್ತಿಯಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ವ್ಯಾಸ. ಅಥವಾ, ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಸಮದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

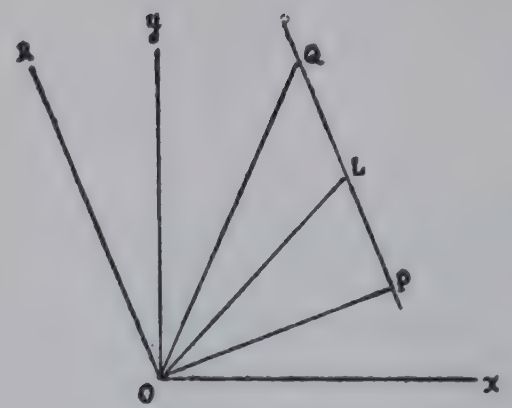
೧.೧೫ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು ಮತ್ತು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು

L, M ಬಿಂದುಗಳು PQ ವನ್ನು ಸಂಗತವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದಾಗ (PQ, LM) = −1. L, M ಗಳು PQವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಂಗತಾನುವರ್ತಿಗಳು ; ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ನಿಜ. P, Q ಮತ್ತು L, M ಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಅಧ್ರುವೀಯವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. P, L, Q, M ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು O ಗೆ (PLQM ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರಬಾರದು) ಸೇರಿಸಿದರೆ OP, OL, OQ, OM ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಸಂಗತ ಕಿರಣ ಪುಂಜ ರಚಿಸುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು O (PQ, LM) = −1 ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ OL, OM ಕಿರಣಗಳನ್ನು OP, OQ ಕಿರಣಗಳ ಸಂಗತಾನುವರ್ತಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ : ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ನಿಜ. OP, OQ ಮತ್ತು OL, OM ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅಧ್ರುವೀಯವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಒಂದು ಸಂಗತ ಕಿರಣಪುಂಜ ಯಾವುದೇ ಛೇದಕದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸಂಗತಸಾಲನ್ನು ಪ್ರಕ್ಷೇಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಾಧಿಸಬೇಕು. P′L′Q′ ಎಂಬ ಒಂದು ಛೇದಕವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕಿರಣಕ್ಕೆ (OM ಗೆ ಆಗಬಹುದು) ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ನಮಗೆ (P′Q′, L′ ∞) = −1 ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. L′ ಬಿಂದು P′Q′ ನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಇದು ಸಾಧ್ಯ.

O ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕು. OP, OQ, OL, OR ಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ



$$y = \lambda_1 x,$$
$$y = \lambda_2 x,$$
$$y = \mu_1 x,$$
$$y = \mu_2 x.$$

Draw any transversal PLQ parallel to OR. Its equation is $y = \mu_2 x + c$. If the four concurrent straight lines are apolar then L must be the midpoint of PQ. Now P is

$$\left[\frac{c}{\lambda_1 - \mu_2}, \frac{\lambda_1 c}{\lambda_1 - \mu_2}\right], \text{ L is } \left[\frac{c}{\lambda_2 - \mu_2}, \frac{\lambda_2 c}{\lambda_2 - \mu_2}\right]$$

and Q is $\left[\dfrac{c}{\mu_1 - \mu_2}, \dfrac{\mu_1 c}{\mu_1 - \mu_2}\right]$

$$\therefore \quad \frac{2}{\lambda_2 - \mu_2} = \frac{1}{\lambda_1 - \mu_2} + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$\therefore \quad (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) = 2(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)$$

If OP, OQ are represented by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ and OL, OR are represented by $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$

we have $\lambda_1 + \mu_1 = -\dfrac{2h}{b}$, $\lambda_1\mu_1 = \dfrac{a}{b}$

$$\lambda_2 + \mu_2 = -\frac{2h'}{b'}, \quad \lambda_2\mu_2 = \frac{a'}{b'}$$

The condition that these may be apolar is

$$\left(-\frac{2h}{b}\right)\left(-\frac{2h'}{b'}\right) = 2\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right)$$

$$ab' + a'b - 2hh' = 0$$

The combined equation to a pair of conjugate diameters of $F = 0$ is given by $(\lambda X + \mu Y)(\lambda' X + \mu' Y) = 0$, where

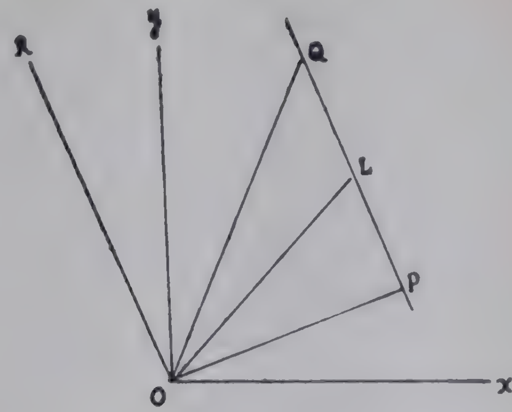
$X = \dfrac{\partial F}{\partial x}$, $Y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$, with the condition

$y=\lambda_1 x,$

$y=\lambda_2 x,$

$y=\mu_1 x,$

$y=\mu_2 x$ ಆಗಿರಲಿ.



OR ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಛೇದಕ PLQ ವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಅದರ ಸಮೀಕರಣ $y=\mu_2 x+c$. ಈ ನಾಲ್ಕು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಅಧ್ರುವೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ L ಬಿಂದು PQ ವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಆಗಿರಬೇಕು. ಈಗ, Pಯು

$$\left[\frac{c}{\lambda_1-\mu_2},\ \frac{\lambda_1 c}{\lambda_1-\mu_2}\right],\ L\left[\frac{c}{\lambda_2-\mu_2},\ \frac{\lambda_2 c}{\lambda_2-\mu_2}\right]$$

ಮತ್ತು $Q\left[\frac{c}{\mu_1-\mu_2},\ \frac{\mu_1 c}{\mu_1-\mu_2}\right]$

$$\therefore\quad \frac{2}{\lambda_2-\mu_2}=\frac{1}{\lambda_1-\mu_2}+\frac{1}{\mu_1-\mu_2}$$

$$\therefore\quad (\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)=2(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)$$

OP, OQ ಗಳ ಸಮೀಕರಣ $ax^2+2\,hxy+by^2=0$ ಮತ್ತು

OL, OR ಗಳ ಸಮೀಕರಣ $a'x^2+2\,h'xy+b'y^2=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\lambda_1+\mu_1=-\frac{2h}{b},\quad \lambda_1\mu_1=\frac{a}{b}$$

$$\lambda_2+\mu_2=-\frac{2h'}{b'},\quad \lambda_2\mu_2=\frac{a'}{b'}$$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಅಧ್ರುವೀಯವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ

$$\left(-\frac{2h}{b}\right)\left(-\frac{2h'}{b'}\right)=2\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)$$

$$\therefore\quad ab'+a'b-2\,hh'=0$$

F=0 ಯ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ $(\lambda X+\mu Y)(\lambda' X+\mu' Y)=0$. ಇಲ್ಲಿ

$$X=\frac{\partial F}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\lambda\lambda' a + \mu\mu' b + h(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0$$

$$\therefore \quad \lambda\lambda' X^2 + (\lambda\mu' + \lambda'\mu) XY + \mu\mu' Y^2 = 0$$

The combined equation to the asymptotes of the conic is

$$bX^2 - 2hXY + aY^2 = 0$$

The condition that these four lines may be apolar is $\lambda\lambda' a + \mu\mu' b - 2\,\dfrac{\lambda\mu' + \lambda'\mu}{2}(-h) = 0$; that is, $\lambda\lambda' a + \mu\mu' b + h(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0$ which is true. Thus a pair of conjugate diameters are harmonic conjugates with respect to the asymptotes.

1.16 Axes of a conic. The two central conics have two mutually perpendicular diameters about which the conics are symmetrical. The parabola has only one such diameter. These diameters (or axes of symmetry) are called the principal axes or simply the axes of the conic. Thus the central conics have two axes of symmetry whereas the parabola has only one axis. If the parabola is considered as the limiting case of an ellipse we may say that the other axis of the parabola is the line at infinity.

A conic will have a number of pairs of conjugate diameters. In general, they do not contain a right angle. In the special case when they contain a right angle they become the axes of the conic. Because in this case each diameter bisects perpendicularly all chords parallel to the other and so the conic is symmetrical about either of them.

The condition for the perpendicularity of a pair of conjugate diameters is (§ 1.15)

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0, \text{ where}$$

$$\lambda\lambda' a + \mu\mu' b + h(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0$$

$$\therefore \quad a - b + h\,\frac{(\lambda\mu' + \lambda'\mu)}{\lambda\lambda'} = 0$$

The combined equation to the axes is therefore

$$\frac{X^2 - Y^2}{a - b} = \frac{XY}{h}$$

ನಿಯಮ $\lambda\lambda' a + \mu\mu' b + h(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0$

$$\therefore \quad \lambda\lambda' X^2 + (\lambda\mu' + \lambda'\mu)\, XY + \mu\mu' Y^2 = 0$$

ಶಂಕುಜದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$$bX^2 - 2hXY + aY^2 = 0$$

ಈ ನಾಲ್ಕು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಆಧ್ರುವೀಯವಾಗಲು ನಿಯಮ

$$\lambda\lambda' a + \mu\mu' b - 2\,\frac{\lambda\mu' + \lambda'\mu}{2}\,(-h) = 0$$

ಅಂದರೆ $\lambda\lambda' a + \mu\mu' b + h(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0$. ಇದು ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳು ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಸಂಗತಾನುವರ್ತಿಗಳಾಗಿವೆ.

೧.೧೬ ಶಂಕುಜದ ಅಕ್ಷಗಳು. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ವ್ಯಾಸಗಳಿವೆ. ಈ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಆ ಶಂಕುಜಗಳು ಸಮಾಂಗವಾಗಿವೆ. ಪ್ಯರಾಬೊಲಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಇಂಥ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. ಈ ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು (ಅಥವಾ ಸಮಾಂಗಾಕ್ಷಗಳನ್ನು) ಶಂಕುಜದ ಪ್ರಧಾನಾಕ್ಷಗಳು ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ ಅಕ್ಷಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಸಮಾಂಗಾಕ್ಷಗಳಿವೆ; ಪ್ಯರಾಬೊಲಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಸಮಾಂಗಾಕ್ಷವಿದೆ. ಪ್ಯರಾಬೊಲ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮಿತಿಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಇನ್ನೊಂದು ಅಕ್ಷ ಅನಂತರೇಖೆಯಾಗುವುದು.

ಒಂದು ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಜೊತೆಗಳಿವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅವು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವಿಶೇಷ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅವು ಶಂಕುಜದ ಅಕ್ಷಗಳಾಗುವುವು. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯಾಸವೂ ಇನ್ನೊಂದು ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನೂ ಲಂಬೀಯವಾಗಿ ಸಮದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನೂ ಕುರಿತು ಶಂಕುಜ ಸಮಾಂಗವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳ ಲಂಬತ್ವಕ್ಕೆ ನಿಯಮ (§ 1.15)

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0 \quad \text{ಇಲ್ಲಿ}$$

$$\lambda\lambda' a + \mu\mu' b + h(\lambda\mu' + \lambda'\mu) = 0$$

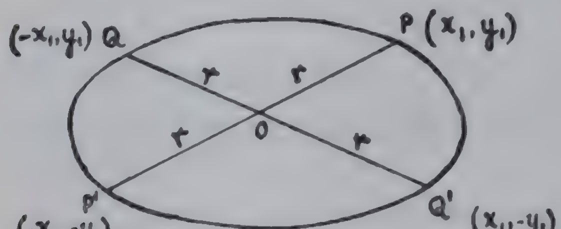
$$\therefore \quad a - b + h\,\frac{\lambda\mu' + \lambda'\mu}{\lambda\lambda'} = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಕ್ಷಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{X^2 - Y^2}{a - b} = \frac{XY}{h} \quad \text{, ಅಂದರೆ}$$

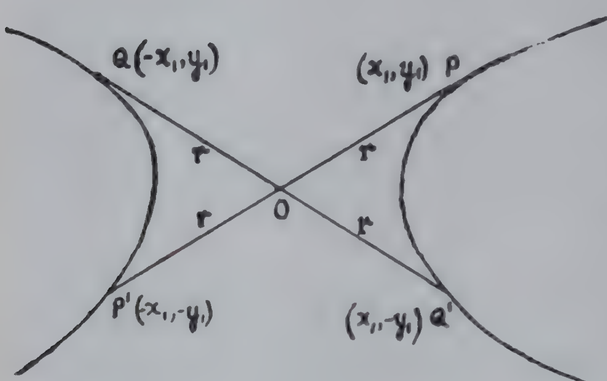
that is, $$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{a-b}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}{h}$$

The following is an alternative and more useful method in finding positions and lengths of the axes.



Lemma: Consider a central conic

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{or} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



For a properly chosen r there are four points on these conics P, P′, Q, Q′ such that OP=OP′ =OQ=OQ′=r. If P be (x_1, y_1) then these points are P′$(-x_1,-y_1)$, Q $(-x_1, y_1)$, Q′ $(x_1, -y_1)$. If now the radii coincide they do so along the major (transverse) axis or the minor (conjugate) axis. In the former case $x_1=a$, $y_1=-y_1$ or $y_1=0$. In the latter case $x_1=-x_1$ or $x_1=0$, $y_1=b$ for an ellipse; $y_1=ib$ for a hyperbola. Thus in a central conic when a pair of equal radii vectors coincide they do so along the major (transverse) or the minor (conjugate) axis.

Let the central conic referred to its centre as origin be

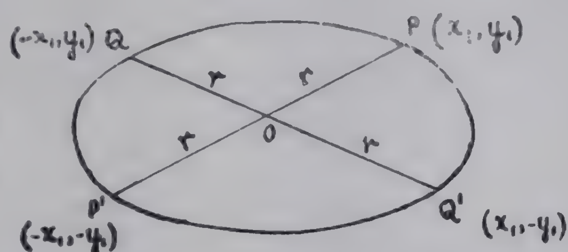
$$ax^2+2hxy+by^2=1 \qquad \cdots \quad (1)$$

Consider a concentric circle $x^2+y^2=r^2$ ... (2

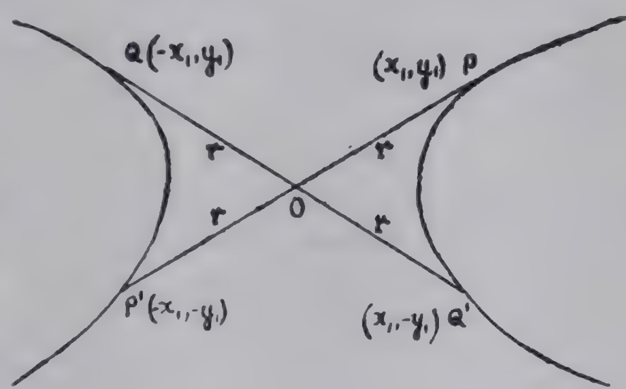
$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{a-b} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y}}{b}$$

ಅಕ್ಷಗಳ ಸ್ಥಾನ, ಮಾನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನ ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಅವಲಂಬ : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಅಥವಾ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಂಬ ಒಂದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. r ಎಂಬ ಒಂದು ಉದ್ದವನ್ನು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿ ಆರಿಸಿದರೆ $OP = OP' = OQ = OQ' = r$ ಆಗಿರುವಂತೆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು (P, P′, Q, Q′) ಈ ಶಂಕುಜಗಳ ಮೇಲಿರುವುವು.



P ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಆಗಿದ್ದರೆ ಉಳಿದ ಬಿಂದುಗಳು $P'(-x_1, -y_1)$, $Q(-x_1, y_1)$, $Q'(x_1, -y_1)$ ಆಗುತ್ತವೆ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವುದಾದರೆ ಅವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ (ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷ) ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ (ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ) ಮೇಲೆ ಮಾತ್ರ ಒಂದಾಗುವುವು. ಮೊದಲಿನ



ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $x_1 = a, y_1 = -y_1$ ಅಥವಾ $y_1 = 0$. ಎರಡನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $x_1 = -x_1$ ಅಥವಾ $x_1 = 0, y_1 = b$ (ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ), $y_1 = ib$ (ಹೈಪರ್ಬೋಲಕ್ಕೆ). ಹೀಗೆ ಒಂದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಂಡರೆ ಅವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ (ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷ) ಅಥವಾ ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ (ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ) ಮೇಲೆ ಒಂದಾಗುವುವು.

ಕೇಂದ್ರ ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿರುವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜದ ಸಮೀಕರಣ $ax^2 = 2hxy + by^2 = 1 \ldots (1)$ ಆಗಿರಲಿ. $x^2 + y^2 = r^2 \ldots (2)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಏಕ

The common chords of (1) and (2) are diameters of the conic. The combined equation to these diameters is got by homogenising (1) with the help of (2). It is

$$ax^2+2hxy+by^2=1=\frac{x^2+y^2}{r^2}$$

$$(ar^2-1)x^2+2hxyr^2+(br^2-1)y^2=0$$

This equation can be viewed as a quadratic in r. The two roots correspond to the two separate common chords (*i.e.*, diameters) between (1) and (2). If these diameters coincide they give us the major (transverse) or the minor (conjugate) axis. The condition for this is

$$4h^2r^4-4(ar^2-1)(br^2-1)=0$$

$$\therefore \quad (ar^2-1)(br^2-1)=h^2r^4 \quad \cdots \quad (3)$$

$$\therefore \quad (ab-h^2)r^4-(a+b)r^2+1=0 \quad \cdots \quad (4)$$

This is a quadratic equation in r^2. The discriminant of (4)$=(a+b)^2-4(ab-h^2)=(a-b)^2+4h^2$ which is always positive. Hence the roots of (4) (viewed as a quadratic in r^2) are real and distinct. Let these roots be r_1^2, r_2^2. The following three cases arise—

(1) r_1^2, r_2^2 are both positive. The relevant condition is $ab-h^2>0$. The conic is an ellipse. Both r_1 and r_2 are real in this case. The greater of them, say, r_1 is the semimajor axis and the smaller r_2 is the semiminor axis.

(2) One of the roots is negative, say $r_2^2<0$ and $r_1^2>0$. The relevant condition is $ab-h^2<0$. The conic is a hyperbola. r_1 is real and r_2 is imaginary. r_1 gives the semitransversel axis.

(3) r_1^2 and r_2^2 are both negative. This is the case of an imaginary ellipse.

The axes can be fixed as follows:

Their combined equation is

$(ar^2-1)x^2+2hxyr^2+(br^2-1)y^2=0$ together with the condition $(ar^2-1)\ (br^2-1)=h^2r^4$. We can substitute for br^2-1 (or ar^2-1).

ಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. (1) ಮತ್ತು (2)ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾಗಳು ಶಂಕುಜದ ವ್ಯಾಸಗಳು. (1)ನ್ನು (2)ರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಮಾನಘಾತಿಸಿದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು. ಅದು

$$ax^2 + 2xhy + by^2 = 1 = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$$

$$(ar^2 - 1)x^2 + 2hxyr^2 + (br^2 - 1)y^2 = 0$$

ಇದನ್ನು r ನಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಇದರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು (1) ಮತ್ತು (2)ರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು (ಅಂದರೆ ವ್ಯಾಸಗಳು) ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಈ ವ್ಯಾಸಗಳು ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಅವು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ (ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷ) ಮತ್ತು ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ (ಅನುವರ್ತಿ ಅಕ್ಷ) ಇವುಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಲು ನಿಯಮ

$$4h^2r^4 - 4(ar^2 - 1)(br^2 - 1) = 0$$

$$(ar^2 - 1)(br^2 - 1) = h^2r^4 \quad \cdots \quad (3)$$

$$\therefore \quad (ab - h^2)r^4 - (a + b)r^2 + 1 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

ಇದು r^2 ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ. (4)ರ ಶೋಧಕ $= (a+b)^2 - 4(ab - h^2) = (a-b)^2 + 4h^2$. ಇದು ಸದಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (4)ರ ಮೂಲಗಳು (r^2ದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ನೋಡಿದಾಗ) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿವೆ. ಇವು r_1^2 ಮತ್ತು r_2^2 ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಉದಯಿಸುತ್ತವೆ.

(1) r_1^2, r_2^2 ಎರಡೂ ಧನಾತ್ಮಕ. $ab - h^2 > 0$ ಇದರ ನಿಯಮ. ಈಗ ಶಂಕುಜ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ. r_1, r_2 ಎರಡೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಧಿಕ ಬೆಲೆಯುಮ, r_1 ಎಂದಿರಲಿ. ಅರ್ಧ ಧೀರ್ಘಾಕ್ಷ; ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯದು, r_2, ಅರ್ಧ ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ.

(2) ಒಂದು ಮೂಲ ಋಣಾತ್ಮಕ, $r_2^2 < 0$ ಎಂದಿರಲಿ, ಮತ್ತು $r_1^2 > 0$. ಇದರ ನಿಯಮ $ab - h^2 < 0$. ಈಗ ಶಂಕುಜ ಹೈಪರ್ಬೋಲ. r_1 ವಾಸ್ತವ, r_2 ಊಹ್ಯ. r_1 ಅರ್ಧ ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

(3) r_1^2 ಮತ್ತು r_2^2 ಎರಡೂ ಋಣಾತ್ಮಕ. ಈಗ ಒಂದುಊಹ್ಯ ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಕ್ರಮ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ $(ar^2 - 1)x^2 + 2hxy\,r^2 + (br^2 - 1)y^2 = 0$ ಇಲ್ಲಿ
$(ar^2 - 1)(br^2 - 1) = h^2r^4$
$br^2 - 1$ ಕ್ಕೆ (ಅಥವಾ $ar^2 - 1$) ಆದೇಶಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \quad (ar^2-1)\,x^2+2bxyr^2+\frac{b^2\,r^4}{ar^2-1}\,y^2=0$$

$$\therefore \quad [(ar^2-1)x+br^2\,y]^2=0$$

$$\therefore \quad (ar^2-1)x+br^2\,y=0$$

Corresponding to the root $r_1^{\,2}$ the axis is

$$(ar_1^{\,2}-1)x+br_1^{\,2}\,y=0$$

and for $r_2^{\,2}$ the axis is

$$(ar_2^{\,2}-1)x+br_2^{\,2}\,y=0$$

It may be observed that even though for a hyperbola $r_2^{\,2}$ is negative the corresponding (conjugate) axis is not imaginary. This is because its equation does not involve r_2 but only $r_2^{\,2}$.

1.17 Foci of a conic. For the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ the foci are at the points $(\pm ae, 0)$ or $[\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0]$. The corresponding directrices are $x=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$. The symmetry of these equations leads us to infer that there must be another set of foci at $[0, \pm\sqrt{b^2-a^2}]$ with the corresponding directrices $y=\pm\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}$. Since b^2-a^2 is negative these are imaginary. Even then every point on the ellipse will satisfy the focus-directrix property with reference to each of these imaginary sets. The student should verify this property. The eccentricity in this case is $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ $\left(\text{in the previous case it was } \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$ which is also imaginary. A similar argument holds good for the hyperbola also. But in this case the eccentricity corresponding to the imaginary foci is real. Therefore we may say that a central conic

$$(ar^2-1)\ x^2+2bxy\ r^2+\frac{b^2r^4y^2}{ar^2-1}=0$$

$$\therefore\quad [(ar^2-1)\ x+br^2y]^2+0$$

$$\therefore\quad (ar^2-1)\ x+br^2y=0$$

ಮೂಲದ $r_1{}^2$ ಬೆಲೆಗೆ ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ

$$(ar_1{}^2-1)\ x+br_1{}^2y=0$$

$r_2{}^2$ ಬೆಲೆಗೆ ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ

$$(ar_2{}^2-1)\ x+br_2{}^2y=0$$

ಹೈಪರ್ಬೋಲದಲ್ಲಿ $r_2{}^2$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾದರೂ ತತ್ಸಂಬಂಧಿ (ಅನುವರ್ತಿ) ಅಕ್ಷ ಊಹ್ಯ ವಲ್ಲ. ಅಕ್ಷ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ r_2 ಇರದಿರುವುದೇ ಇದರ ಕಾರಣ.

೧.೧೭ ಶಂಕುಜದ ನಾಭಿಗಳು

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಶಂಕುಜದ ನಾಭಿಗಳು $(\pm a, 0)$ ಅಥವಾ $[\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0]$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿವೆ. ತತ್ಸಂಬಂಧ ಚಾಲಕಗಳು

$$x=\frac{\pm\ a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮಾಂಗತ್ವದಿಂದ $(0, \pm\sqrt{b^2-a^2})$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆ ನಾಭಿಗಳಿರುವುವೆಂದೂ ತತ್ಸಂಬಂಧಿ ಚಾಲಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$y=\frac{\pm\ b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

ಎಂದೂ ತರ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ. $b^2-a^2<0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇವು ಊಹ್ಯ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ನಾಭೀಚಾಲಕ ಗುಣವನ್ನು ತಾಳಿ ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಗುಣವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ತಾಳೆನೋಡಬೇಕು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ

$\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ (ಹಿಂದಿನ ಸಲ ಇದರ ಬೆಲೆ $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$).

ಇದೂ ಊಹ್ಯ. ಹೈಪರ್ಬೋಲವನ್ನು ಕುರಿತು ಸಹ ಇದೇ ತರಹದ ವಾದವನ್ನು ಮಂಡಿಸಬಹುದು. ಊಹ್ಯ ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ ಮಾತ್ರ ವಾಸ್ತವವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ನಾಭಿಗಳೂ ನಾಲ್ಕು ತತ್ಸಂಬಂಧಿ

has four foci and four corresponding directrices. Of these, two sets are real and two sets imaginary. In a parabola (limiting case of an ellipse) only one focus and the corresponding directrix are finite. The remaining three sets all coincide at infinity.

The combined equation to the pair of tangents from a focus $(ae, 0)$ to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)(e^2-1) = \left(\frac{xe}{a} - 1\right)^2, \quad b^2 = a^2(1-e^2).$$

On simplification this reduces to

$$(x-ae)^2 + y^2 = 0$$

This is the point circle at $(ae, 0)$. A similar property for the foci of the hyperbola and the parabola can also be established. Therefore the combined equation to the pair of tangents from a focus to a conic is the point circle at that focus. Let (x_1, y_1) be a focus of $F=0$. Then

$FF_{11} - F_1{}^2 \equiv (ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c)(ax_1{}^2 + 2hx_1y_1 + by_1{}^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) - [x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 = c)]^2 = 0$ should represent a point circle. The conditions are

$F_{11}(a-b) = (ax_1 + hy_1 + g)^2 - (hx_1 + by_1 + f)^2$ and $hF_{11} = (ax_1 + hy_1 + g)(hx_1 + by_1 + f)$

$$\therefore \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2}{a-b} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial y_1}}{h} = 4F_{11}$$

$\therefore$ The foci of $F=0$ are given by

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{a-b} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{h} = 4F$$

These equations will give four sets of values for x and y showing that the conic has four foci.

ಚಾಲಕಗಳೂ ಇವೆ. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ವಾಸ್ತವವೂ ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆ ಊಹ್ಯವೂ ಆಗಿವೆ. ಒಂದು ಪ್ಯರಾಬೊಲವಲ್ಲಿ (ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಮಿತಿ) ಒಂದು ನಾಭಿ ಮತ್ತು ತತ್ಸಂಬಂಧಿ ಚಾಲಕ ಮಾತ್ರ ಪರ್ಯಾಪ್ತ. ಉಳಿದ ಮೂರು ಜೊತೆಗಳು ಅನಂತದಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗಿವೆ.

ಒಂದು ನಾಭಿ $(ae, 0)$ ಯಿಂದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\ (e^2-1)=\left(\frac{xe}{a}-1\right)^2,\ b^2=a^2(1-e^2)$$

ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ ಇದು $(x-ae)^2 + y^2=0$ ಆಗುವುದು. ಇದು ನಾಭಿ $(ae, 0)$ ಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವೃತ್ತ. ಹೈಪರ್ಬೊಲ ಮತ್ತು ಪ್ಯರಾಬೊಲಗಳ ನಾಭಿಗಳನ್ನೂ ಕುರಿತು ಇದೇ ಗುಣವನ್ನು ಸ್ಥಿರೀಕರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ನಾಭಿಯಿಂದ ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ ಆ ನಾಭಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವೃತ್ತ.

$F=0$ ಯ ಒಂದು ನಾಭಿ (x_1, y_1) ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\begin{aligned}FF_{11}-F_1{}^2\equiv (ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)\ (ax_1{}^2\\ +2hx_1y_1+by_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c)\\ -[x(ax_1+hy_1+g)+y(hx_1+by_1+f)\\ +(gx_1+fy_1+c)]^2 = 0\end{aligned}$$

ಒಂದು ಬಿಂದುವೃತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸಬೇಕು. ಇದರ ನಿಯಮಗಳು

$$F_{11}\ (a-b)=(ax_1+hy_1+g)^2-(hx_1+by_1+f)^2 \quad \text{ಮತ್ತು}$$

$$hF_{11}=(ax_1+hy_1+g)\ (hx_1+by_1+f)$$

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2}{a-b}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}\quad\frac{\partial F}{\partial y_1}}{h}=4F_{11}$$

$\therefore$ $F=0$ ಯ ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಕೊಡುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{a-b}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\quad\frac{\partial F}{\partial y}}{h}=4F$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು x, y ಗಳಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ನಾಭಿಗಳಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

1.18 Director circle. The director circle (also called the orthoptic locus) is the locus of points tangents from which to the conic are at right angles to one another. Let $P(x_1, y_1)$ be a point on the director circle of $F=0$. The combined equation to the pair of tangents from P to $F=0$ is $FF_{11}=F_1^2$. The condition that these tangents may contain a right angle is that the sum of the coefficients of x^2 and y^2 is zero.

$$\therefore \quad (a+b)F_{11} = (ax_1+hy_1+g)^2+(hx_1+by_1+f)^2$$

The locus of P is therefore

$$(a+b)F=(ax+hy+g)^2+(hx+by+f)^2$$

$$\therefore \quad 4(a+b)F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2$$

Expanding this we get

$$(ab-h^2)(x^2+y^2)-2(hf-bg)x-2(gh-af)y+bc-f^2+ca-g^2=0$$

or $C(x^2+y^2)-2Gx-2Fy+A+B=0$

where A, B, C, F, G are the minors of the corresponding small letters in the determinant

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

taken with the proper sign. The locus is a circle whose centre is $\left(\frac{G}{C}, \frac{F}{C}\right)$. Its radius

$$= \sqrt{\frac{G^2}{C^2}+\frac{F^2}{C^2}-\frac{A+B}{C}}$$

Note: (i) The above argument becomes modified for a parabola because in that case $C=ab-h^2=0$. The director circle degenerates into the straight line $2Gx+2Fy=A+B$. We know that perpendicular tangents of a parabola intersect on the directrix. Therefore $2Gx+2Fy=A+B$ is the directrix of the parabola represented by the general equation.

೧.೧೪ ಚಾಲಕ ವೃತ್ತ

ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಬಿಂದುಗಳ ಪಥದ ಹೆಸರು ಚಾಲಕವೃತ್ತ. $F=0$ ಯ ಚಾಲಕವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು $P(x_1, y_1)$ ಆಗಿರಲಿ. P ಯಿಂದ ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ $FF_{11}=F_1{}^2$. ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ :

x^2 ಮತ್ತು y^2 ಗಳ ಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತ $=0$

$$\therefore \quad (a+b)F_{11} = (ax_1+hy_1+g)^2+(hx_1+by_1+f)^2$$

P ಯ ಪಥ $(a+b)F=(ax+hy+g)^2+(hx+by+f)^2$

$$4(a+b)F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2$$

ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ

$$(ab-h^2)(x^2+y^2)-2(hf-bg)x-2(gh-af)y$$
$$+ bc-f^2+ca-g^2=0$$

ಅಥವಾ $C(x^2+y^2)-2Gx-2Fy+A+B=0$

ಇಲ್ಲಿ A, B, C, F, G ಗಳು $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ

ಆಯಾ ಚಿಕ್ಕ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಚಿಹ್ನಸಮೇತ ಲಘುಗಳು. ಈ ಪಥ ವೃತ್ತವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಇದರ ಕೇಂದ್ರ $\left(\frac{G}{C}, \frac{F}{C}\right)$

ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{\frac{G^2}{C^2}+\frac{F^2}{C^2}-\frac{A+B}{C}}$

ಸೂಚನೆ : (1) ಮೇಲಿನ ವಾದ ಒಂದು ಪ್ಯರಾಬೊಲಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯವಾಗದು. ಕಾರಣ, ಅಲ್ಲಿ $C=ab-h^2=0$. ಇದೇ ವಾದವನ್ನು ಮಾರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಚಾಲಕವೃತ್ತ $2Gx+2Fy=A+B$ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿ ವಿಕೃತಗೊಳ್ಳುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಲಂಬಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಸೂಚಿಸುವ ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಚಾಲಕ $2Gx+2Fy=A+B$ ಆಗಿದೆ.

(ii) For any conic we know that the directrix is the polar of the corresponding focus. Thus the directrices of $F=0$ are given by $\frac{\partial F}{\partial x_1} + y\frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial \omega_1} = 0$ where (x_1, y_1) are the solutions (foci) of

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{a-b} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{h} = 4F$$

Example: **(1)** Show that all the conics through the four foci of a conic are rectangular hyperbolas.

The foci of $F=0$ are the intersections of

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{a-b} = 4F \text{ and}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{h} = 4F$$

These equations can be simplified into

$$C(x^2-y^2) = 2Gx - 2Fy - A + B$$
$$Cxy = Fx + Gy - H$$

where A, B, C, F, G, H have the meanings explained in § 1.18. The general equation to the conics through the foci is

$$C(x^2-y^2) - 2Gx + 2Fy + A - B$$
$$+\lambda(Fx + Gy - H - Cxy) = 0$$

This is clearly a rectangular hyperbola.

(2) Show that the equation to the polars of the circular points at infinity with respect to $F=0$ is

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$F \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gzx + 2fyz + cz^2 = 0$, $z=1$ (in the homogeneous form) is the conic. The circular points at infinity

(2) ಯಾವುದೇ ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ ಒಂದು ಚಾಲಕ ಅನುರೂಪ ನಾಭಿಯ ಧ್ರುವೀಯವೆಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $F=0$ ಶಂಕುಜದ ಚಾಲಕಗಳನ್ನು

$$x\frac{\partial F}{\partial x_1}+y\frac{\partial F}{\partial y_1}+\frac{\partial F}{\partial \omega_1}=0$$

ಕೊಡುತ್ತವೆ ; ಇಲ್ಲಿ (x_1, y_1) ಶಂಕುಜದ ನಾಭಿಗಳು ; ಅವು

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{a-b}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{h}=4F$$

ಸಮೀಕರಣದ ಬಿಡಿಸಿಕೆಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ : (1) ಒಂದು ಶಂಕುಜದ ನಾಲ್ಕು ನಾಭಿಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಶಂಕುಜಗಳೂ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$F=0$ಯ ನಾಭಿಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳು :

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{a-b}=4F \quad \text{ಮತ್ತು}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{h}=4F$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ

$$C\,(x^2-y^2)=2Gx-2Fy-A+B$$

$$C\,xy=Fx+Gy\quad -H$$

ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ A, B, C, F, G, H ಗಳಿಗೆ 1.18 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರುವ ಅರ್ಥವಿದೆ. ನಾಭಿಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಶಂಕುಜಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ $C(x^2-y^2)-2Gx+2Fy+A-B+\lambda(Fx+Gy-H-cxy)=0$. ಇದು ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

(2) $F=0$ಯನ್ನು ಕುರಿತು ಅನಂತವೃತ್ತೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಧ್ರುವೀಯಗಳ ಸಮೀಕರಣ $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$F\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gzx+2fyz+cz^2=0$, $z=1$ (ಸಮಾನ ಘಾತೀಯ

are $(1, \pm i, 0)$. The combined equation to the polars of the circular point is

$$[ax+h(xi+y)+byi+gz+fzi][ax+h(-xi+y)-byi+gz-fzi]=0$$

$$[(ax+hy+gz)+i(hx+by+fz)]\,[ax+hy+gz)-i(hx+by+fz)]=0$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2=0$$

(3) Find the coordinates of the focus when $F=0$ is a parabola.

The focus is given by (Ex. 1)

$$2Gx-2Fy-A+B=0$$

$$Fx+Gy-H=0 \text{ since } C=ab-h^2=0$$

$$\therefore \quad 2(G^2+F^2)x=2HF+G(A-B)$$

$$\therefore \quad 2(G^2+F^2)y=2GH-F(A-B)$$

$$\therefore \quad \text{The focus is } \left[\frac{2HF+G(A-B)}{2(G^2+F^2)}, \frac{2GH-F(A-B)}{2(G^2+F^2)}\right]$$

1.19 Tracing of conics. When a numerical example is given the student should be able to trace the conic on a graph sheet.

Examples

1. Trace the conic $5x^2-6xy+5y^2-18x-2y+19=0$

I Step. Nature of the conic.

$$ab-h^2=25-9=16>0. \quad \text{Ellipse.}$$

II Step. Centre $(\bar{x}, \bar{y})$ is given by

$$5\bar{x}-3\bar{y}-9=0$$

$$-3\bar{x}+5\bar{y}-1=0$$

$$\therefore \quad \bar{x}=3, \bar{y}=2$$

III Step. Give a parallel transformation to the point (3, 2). If the new current coordinates are X, Y, the transformation equations are $x=X+3, y=Y+2$. The transformed equation is

ರೂಪದಲ್ಲಿ) ಶಂಕುಜ. $(1, \pm i, 0)$ ಇವು ಅನಂತವೃತ್ತೀಯ ಬಿಂದುಗಳು. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಧ್ರುವೀಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$$[ax+h(xi+y)+byi+gz+fzi]\,[ax+h(-xi+y)-byi+gz-fzi]=0$$

$$[(ax+hy+gz)+i(hx+by+fz)]\,[(ax+hy+gz)-(hx+by+fz)]=0$$

$$\therefore \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2=0$$

(3) $F=0$ ಒಂದು ಪ್ಯರಾಬೊಲವಾದಾಗ ಅದರ ನಾಭಿಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಾಭಿಯನ್ನು ಕೊಡುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಉದಾ : 1)

$$2Gx-2Fy-A+B=0$$

$$Fx+Gy-H=0 \quad , \text{ ಕಾರಣ } C=ab-h^2=0$$

$$\therefore \quad 2(G^2+F^2)x=2HF+G(A-B)$$

$$\therefore \quad 2(G^2+F^2)\,y=2GH-F(A-B)$$

$$\therefore \quad \text{ನಾಭಿ}\left[\frac{2HF+G(A-B)}{2(G^2+F^2)},\ \frac{2GH-F(A-B)}{2(G^2+F^2)}\right]$$

೧.೧೯ ಶಂಕುಜ ಚಿತ್ರಣ

ಒಂದು ಸಾಂಖಿಕ ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಆ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಗ್ರಾಫ್‌ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಮರ್ಥನಾಗಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $5x^2-6xy+5y^2-18x-2y+19=0$ ಈ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ.

1ನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆ: ಶಂಕುಜದ ಸ್ವರೂಪ.

$ab-h^2=25-9=16>0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ.

2ನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆ: ಕೇಂದ್ರ $(\bar{x}, \bar{y})$ಯನ್ನು ನೀಡುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$5\bar{x}-3\bar{y}-9=0$$

$$-3\bar{x}+5\bar{y}-1=0$$

$$\therefore \ \bar{x}=3, \quad \bar{y}=2$$

3ನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆ: ಸಮಾಂತರ ಪರಿವರ್ತನೆಯನ್ನು (3, 2) ಬಿಂದುವಿಗೆ ನೀಡಬೇಕು. ಹೊಸ ವಿನಿಮಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು X, Y ಆಗಿದ್ದರೆ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x=X+3$, $y=Y+2$. ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮೀಕರಣ

$$5X^2-6XY+5Y^2+g\bar{x}+f\bar{y}+c=0$$

$$\therefore \quad 5X^2-6XY+5Y^2-10=0$$

IV Step. Homogenise this equation with the help of the equation to a concentric circle, $X^2+Y^2=r^2$

$$5X^2-6XY+5Y^2-10\left(\frac{X^2+Y^2}{r^2}\right)=0.$$

$$(5r^2-10)\,X^2-6XY\,r^2+(5r^2-10)\quad Y^2=0$$

This is the combined equation to the common diameters. When they coincide they do so along the axes of the conic. The condition is $(5r^2-10)^2=9r^4$

$$5r^2-10=\pm 3r^2$$

$$r_1{}^2=5,\ r_1{}^2=\frac{5}{4}$$

The major axis is $(5r_1{}^2-10)\,X-3r_1{}^2Y=0$

$$\therefore \qquad X-Y=0$$

The minor axis is the perpendicular line $X+Y=0$

Their equations in the original system are

$$x-y-1=0 \text{ and } x+y-5=0$$

The eccentricity e is given by

$$\frac{5}{4}=5\,(1-e^2)$$

$$\therefore \quad e=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Semilatus rectum $=\dfrac{\frac{5}{4}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

The foci are on the major axis on either sides of C at distances

$$\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$5X^2-6XY+5Y^2+g\bar{x}+f\bar{y}+c=0$$

$$5X^2-6XY+5Y^2-10=0$$

4ನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆ: $X^2+Y^2=r^2$ ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಮಾನಘಾತಿಸಬೇಕು.

$$5X^2-6XY+5Y^2-10\left(\frac{X^2+Y^2}{r^2}\right)=0$$

$(5r^2-10)X^2-6XYr^2+(5r^2-10)Y^2=0$. ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯಾಸಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ. ಅವು ಐಕ್ಯವಾಗುವಾಗ ಶಂಕುಜವ ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಆಗುತ್ತವೆ. ಇದರ ನಿಯಮ $(5r^2-10)^2=9r^4$

$$5r^2-10=\pm 3r^2$$

$$r_1^2=5,\ r_2^2=\frac{5}{4}$$

ದೀರ್ಘಾಕ್ಷ $(5r_1^2-10)X-3r_1^2\ Y=0$

$$X-Y=0$$

ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷ ಇದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆ

$$X+Y=0$$

ಮೂಲನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$x-y-1=0$ ಮತ್ತು $x+y-5=0$

ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ e ಯನ್ನು $\frac{5}{4}=5(1-e^2)$ ಸಮೀಕರಣ ನೀಡುವುದು.

$$\therefore\quad e=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

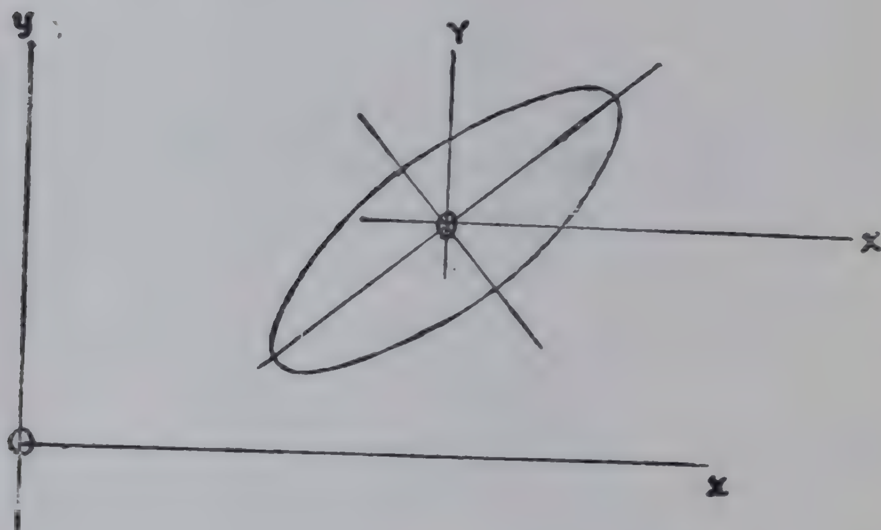
ಅರ್ಧನಾಭೀಲಂಬ $\dfrac{\frac{5}{4}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

ನಾಭಿಗಳು ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದ ಮೇಲೆ C ಯ ಉಭಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿಯೂ

$\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುವು.

V Step. Calculate convenient points on the conic. The ends of the latera recta give four points and the ends of the axes another four points. Theoretically a conic is completely determined when five points on it are known.

The conic is as shown in the figure.



2. Trace the conic $7x^2+8xy+y^2+6x+6y-9=0$

$ab-h^2= -9<0$. The conic is a hyperbola. Its centre is $O'(-1, 1)$. The transformed equation to the conic with reference to parallel axes through O' is

$$7X^2+XY+Y^2-9=0.$$

The lengths of the semiaxes are given by equating the discriminant of

$(7r^2-9)X^2+8XYr^2+(r^2-9)Y^2=0$ to zero.

$$(7r^2-9)(r^2-9)-16r^4=0.$$

$$r_1^2=1,\ r_2^2= -9$$

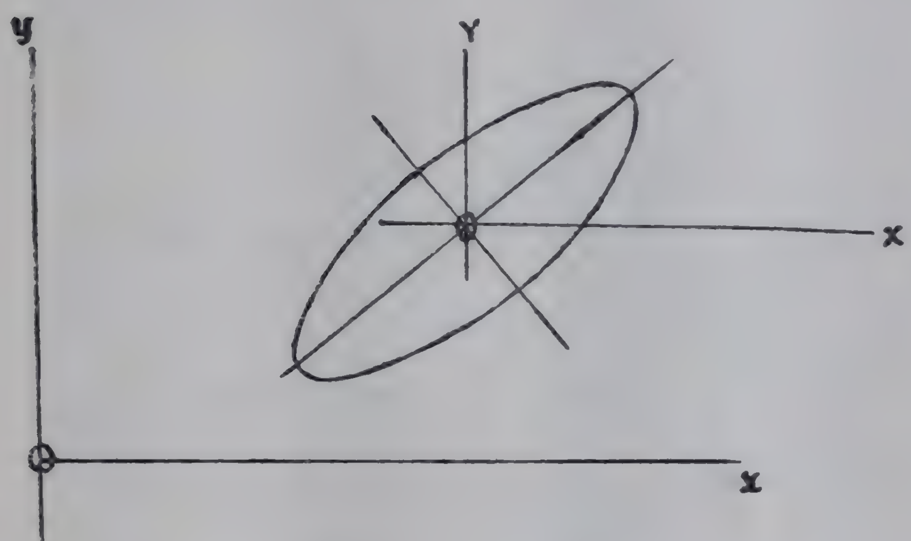
Transverse axis is $(7r_1^2-9)X+4r_1^2Y=0;\ X-2Y=0.$

Conjugate axis is the perpendicular line $2X+Y=0.$

Their equations in the original system are $x-2y+3=0$, $2x+y+1=0.$

5ನೆಯ ಹೆಜ್ಜೆ: ಶಂಕುಜದ ಮೇಲಿನ ಅನುಕೂಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಬೇಕು. ನಾಭೀಲಂಬಗಳ ಕೊನೆಗಳು ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಅಕ್ಷಗಳ ಕೊನೆಗಳು ಇನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ನೀಡುವುವು. ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕವಾಗಿ, ಒಂದು ಶಂಕುಜದ ಮೇಲಿನ ಐದು ಬಿಂದುಗಳು ಆ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಕು.

ಶಂಕುಜ ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತಿದೆ.



2. ಈ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ : $7x^2+8xy+y^2+6x+6y-9=0$

$ab-h^2=-9<0$. ಶಂಕುಜ ಒಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲ. ಇದರ ಕೇಂದ್ರ $O'(-1, 1)$. O' ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸಮಾನಾಂತರ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಶಂಕುಜದ ಸಮೀಕರಣ

$$7X^2+8XY+Y^2-9=0$$

ಅರ್ಧಾಕ್ಷಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು

$$(7r^2-9)\,X^2+8XYr^2+(r^2-9)\,Y^2=0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$r_1^2=1,\ r_2^2=-9$$

ಅನುಪ್ರಸ್ಥಾಕ್ಷ $(7r_1^2-9)\,X+4r_1^2Y=0$

$$X-2Y=0$$

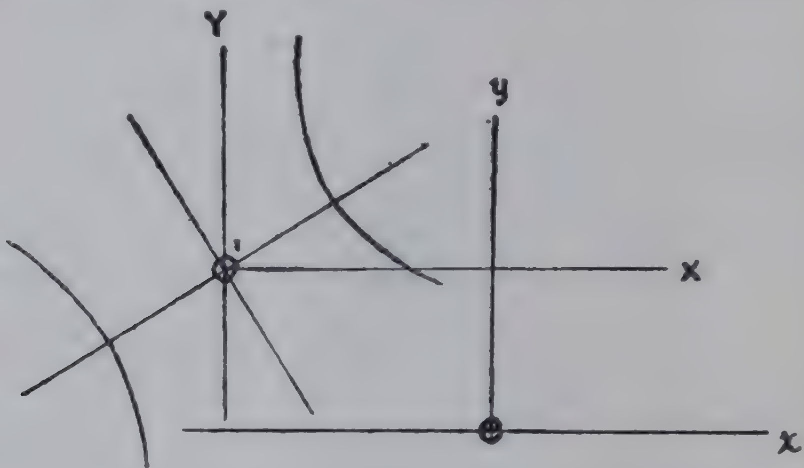
ಅನುವರ್ತಿಅಕ್ಷ $2X+Y=0$

ಮೂಲ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x-2y+3=0,\quad 2x+y+1=0$$

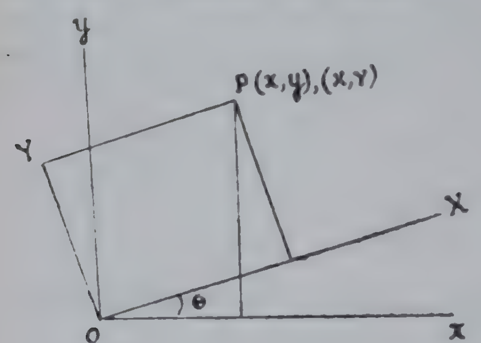
The eccentricity e is given by $1=9\ (e^2-1)$ or $e=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Further points (intersections with the original axes, their reflections on the axes of the conic and so on) can be calculated. The conic is as shown in the figure.



Alternative Method

Rotate the axes of coordinates about O through an angle θ. If the new current coordinates



of P (x, y) be (X, Y) we have

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$

$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

$F \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + fy + c = 0$. The transformed equation is

$$AX^2 + 2HXY + BY^2 + 2GX + 2FY + C = 0$$

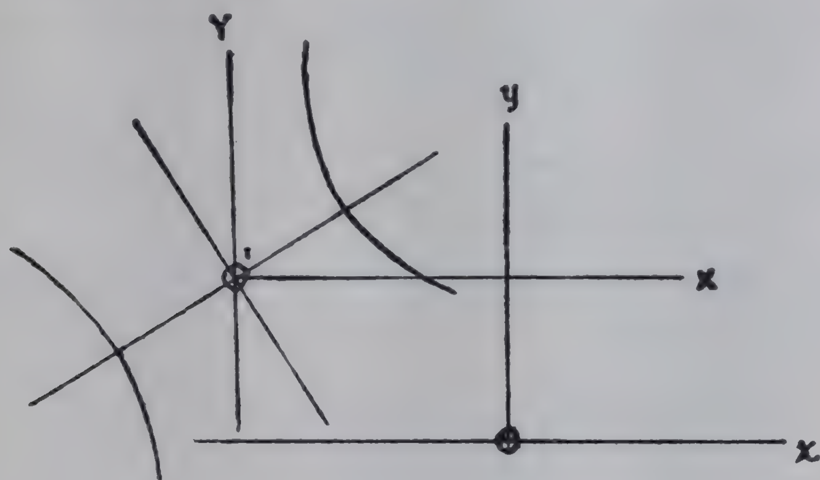
where $\quad A = a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$

$\qquad\quad B = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$

ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ e ಯನ್ನು $1=9(e^2-1)$ ನೀಡುತ್ತದೆ.

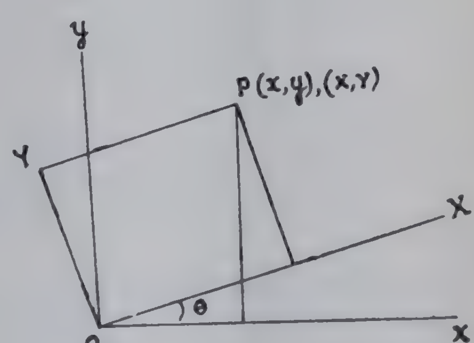
$$e = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

ಇತರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು (ಮೂಲಾಕ್ಷಗಳೊಡನೆ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳು, ಶಂಕುಜದ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರತಿ ಫಲನಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ) ಗಣಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಶಂಕುಜವಿದೆ.



ಪರ್ಯಾಯ ಕ್ರಮ :

ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು Oನ ಸುತ್ತ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಬೇಕು. $P(x, y)$ಯ ಹೊಸ ವಿನಿಮಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು



(X, Y) ಆಗಿದ್ದರೆ

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

$$F \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮೀಕರಣ

$$AX^2 + 2HXY + BY^2 + 2GX + 2FY + C = 0$$

ಇಲ್ಲಿ $A = a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$

$B = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$

$H = -(a-b)\sin\theta\cos\theta + h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. Choose θ such that $H=0$

$$\therefore \quad \tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

It can be easily seen that

$$A+B = a+b$$

$$AB-H^2 = ab - h^2 \text{ or (since } H=0)$$

$$AB = ab - h^2$$

The transformed equation is

$AX^2+BY^2+2GX+2FY+C=0$

The student should apply this method to the earlier two worked out examples.

3. Trace the conic

$x^2-4xy+4y^2-6x-8y+1=0$

$ab-h^2=0$. The conic is a parabola. Rotate the axes about O through an angle θ where $\tan 2\theta = \frac{4}{3}$. $\therefore \tan\theta = \frac{1}{2}$

The transformation equations are

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \frac{2X-Y}{\sqrt{5}}$$

$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \frac{X+2Y}{\sqrt{5}}$$

The transformed equation is

$25Y^2-20\sqrt{5}\,X-10\sqrt{5}\,Y+5=0$

$$\left(Y-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}X$$

The vertex is at $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ with reference to OX, OY.

$$H=-(a-b)\sin\theta\ \cos\theta+b\ (\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$H=0$ ಆಗಿರುವಂತೆ θವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು.

$$\therefore \quad \tan 2\theta = \frac{2b}{a-b}$$

$$A+B=a+b$$

$AB-H^2=ab-b^2$ ಅಥವಾ $(H=0)$

$AB=ab-b^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮೀಕರಣ

$$AX^2+BY^2+2GX+2FY+C=0$$

ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ತೋರಿಸಿರುವ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕು.

3. ಈ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ :

$$x^2-4xy+4y^2-6x-8y+1=0$$

$ab-h^2=0$. $\therefore$ ಇದು ಒಂದು ಪ್ಯರಾಬೊಲ. ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು O ನ ಸುತ್ತಲೂ θ ಕೋನದಷ್ಟು ಆವರ್ತಿಸಬೇಕು, ಇಲ್ಲಿ, $\tan 2\theta=\frac{4}{3}$ $\therefore$ $\tan\theta=\frac{1}{2}$ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x=X\ \cos\ \theta-Y\ \sin\ \theta = \frac{2X-Y}{\sqrt{5}}$$

$$y=X\ \sin\ \theta+Y\ \cos = \frac{X+2Y}{\sqrt{5}}$$

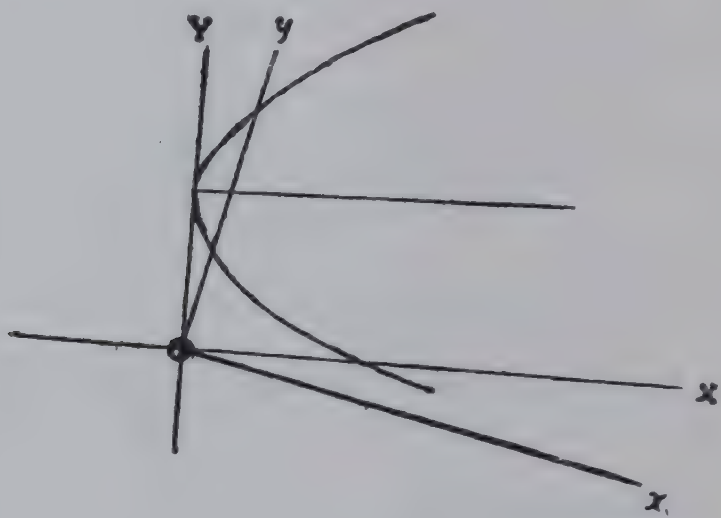
ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮೀಕರಣ

$$25Y^2-20\sqrt{5}\ X-10\sqrt{5}\ Y+5=0$$

$$\left(Y-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{5}}$$

OX, OY ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಇದರ ಶೃಂಗ $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

The latus rectum is $\frac{4}{\sqrt{5}}$. The intersections with Ox, Oy can be calculated. The conic is as shown in the figure.

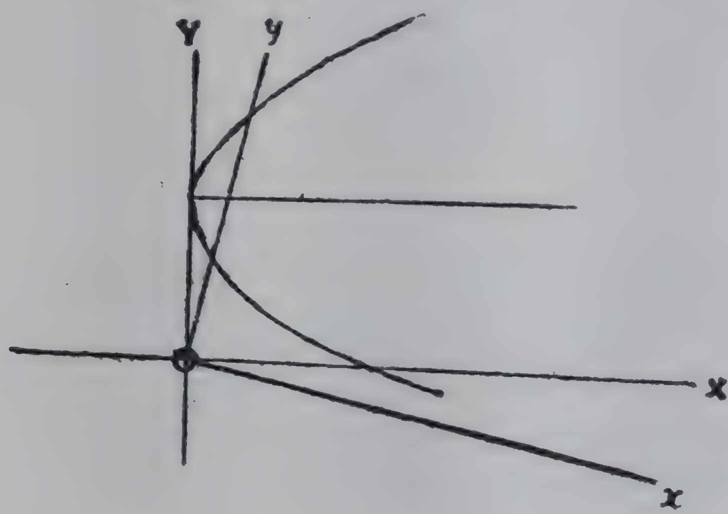


Exercises 1.1

Trace the following conics:

1. $17x^2-12xy+8y^2-56x+8y+32=0$
2. $3x^2-4xy-8x+8y+8=0$
3. $37x^2-32xy+13y^2-42x+6y-27=0$
4. $7x^2-8xy+y^2-6x+6y-9=0$
5. $x^2+2xy-3x+6y-4=0$
6. $9x^2+6xy+y^2+2x+3y+4=0$
7. $(2x+y+1)^2=x-2y$
8. $4x^2-4xy+y^2-10y-19=0$
9. $9x^2+24xy+16y^2-86x+52y-139=0$
10. $25x^2+120xy+144y^2-146x+89y-12=0$
11. $x^2+4xy+y^2-2x+2y-6=0$
12. $77x^2+78xy-27y^2+70x-30y+29=0$
13. $2x^2-xy-3y^2+4x-1=0$

ನಾಭೀಲಂಬ $\frac{4}{\sqrt{5}}$. Ox, Oy ಅಕ್ಷಗಳೊಡನೆ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಶಂಕುಜವಿದೆ.



ಅಭ್ಯಾಸ ೧.೧

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶಂಕುಜಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿ :

1. $17x^2-12xy+8y^2-56x+8y+32=0$
2. $3x^2-4xy-8x+8y+8=0$
3. $37x^2-32xy+13y^2-42x+6y-27=0$
4. $7x^2-8xy+y^2-6x+6y-9=0$
5. $x^2+2xy-3x+by-4=0$
6. $9x^2+6xy+y^2+2x+3y+4=0$
7. $(2x+y+1)^2=x-2y$
8. $4x^2-4xy+y^2-10y-19=0$
9. $9x^2+24xy+16y^2-86x+52y-139=0$
10. $25x^2+120xy+144y^2-146x+89y-12=0$
11. $x^2+4xy+y^2-2x+2y-6=0$
12. $77x^2+78xy-27y^2+70x-30y+29=0$
13. $2x^2-xy-3y^2+4x-1=0$

14. $3x^2+6xy+2y^2+6x+10y+1=0$

15. $7x^2-48xy-7y^2+110x-20y+100=0$

16. $5x^2+4xy-y^2-42x-6y+63=0$

17. $x^2-16xy-11y^2+10x+10y-7=0$

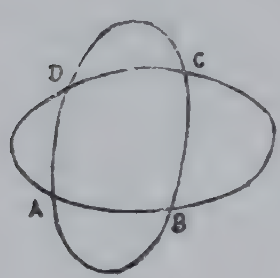
18. $(x+2y-3)(-4x+y+3)+10=0$

19. $7x^2+12xy-2y^2-26x-8y+7=0$

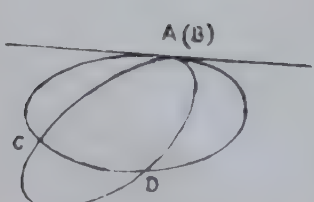
20. $6x^2+11xy-10y^2-4x+9y=0$

1.20 Contact of conics. The common points of two conics $F=0$ and $F'=0$ are found by solving between their equations. Eliminating one of the variables between them we get a fourth degree equation in the other variable. This shows, in general two conics intersect in four points. For a similar reason two circles also intersect in four points but two of these points are the circular points at infinity.

Let the common points of $F=0$ and $F'=0$ be A. B, C, D. The following cases will arise (see § 1.8).



1. A, B, C, D are all distinct. If AB is $L \equiv lx+my+n=0$ and CD is $L' \equiv l'x+m'y+n'=0$, we know $F+\lambda LL'=0$ represents a system of conics passing through A, B, C, D. For some value of λ it will represent $F'=0$.



2. B coincides with A; C and D remain distinct. The two conics touch at A. They are said to have single contact at A. If A is (x_1, y_1) and CD is $L \equiv lx+my+n=0$ considering the tangent at A as the limiting case of the chord AB we may write the equation to the conics having single contact at A as $F+\lambda LF_1=0$.

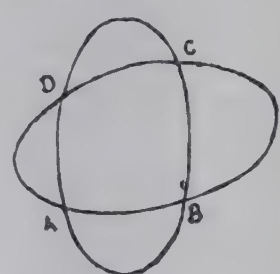
14. $3x^2+6xy+2y^2+6x+10y+1=0$
15. $7x^2-48xy-7y^2+110x-20y+100=0$
16. $5x^2+4xy-y^2-42x-6y+63=0$
17. $x^2-16xy-11y^2+10x+10y-7=0$
18. $(x+2y-3)(-4x+y+3)+10=0$
19. $7x^2+12xy-2y^2-26x-8y+7=0$
20. $6x^2+11xy-10y^2-4x+9y=0$

೧.೨೦ ಶಂಕುಜಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ

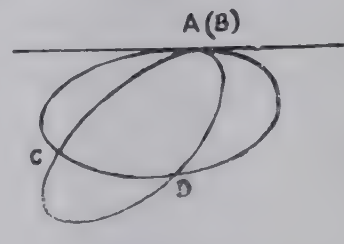
$F=0$, $F'=0$ ಶಂಕುಜಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಸಿಕೆಯಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಚರವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಚರದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಶಂಕುಜಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳೂ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುವು. ಆದರೆ ಇವುಗಳಪೈಕಿ ಎರಡು ಅನಂತವೃತ್ತೀಯ ಬಿಂದುಗಳು.

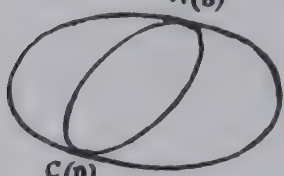
$F=0$, $F'=0$ ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು A, B, C, D ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ (§ 1·8 ನ್ನು ನೋಡಿ).

1. A, B, C. D ಎಲ್ಲವೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ. AB ಯು $L\equiv lx+my+n=0$ ಮತ್ತು CDಯು $L'\equiv l'x+m'y+n'=0$, ಆಗಿದ್ದರೆ $F+\lambda LL'=0$ ಸಮೀಕರಣ A, B, C, Dಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಶಂಕುಜ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. λದ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ ಇದು $F'=0$ ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

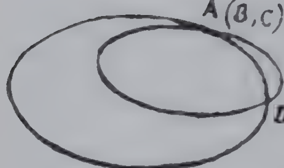


2. B ಬಿಂದು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು; C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿರುವುವು. ಎರಡು ಶಂಕುಜಗಳೂ Aಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳಿಗೆ Aಯಲ್ಲಿ ಏಕಸ್ಪರ್ಶವಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. A ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಮತ್ತು CDಯು $L\equiv lx+my+n=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ Aಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು AB ಜ್ಯಾದ ಮಿತಿಯ ರೂಪವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ Aಯಲ್ಲಿ ಏಕಸ್ಪರ್ಶವಿರುವ ಎಲ್ಲ ಶಂಕುಜಗಳನ್ನೂ $F+\lambda LF_1=0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

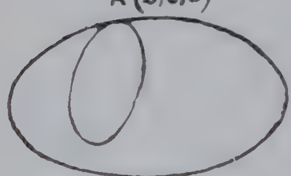




3. B coincides with A, and D coincides with C. The two conics are said to have double contact at A and C. If the equations of AC and BD were $L=0$, $L'=0$ in this case $L \equiv L'$. Hence $F+\lambda L^2=0$ is the equation to the system of conics having double contact at the extremities of the chord $L = 0$.



4. B, C coincide with A, and D is distinct. The two conics are said to have three-point contact at A. This is also called contact of the second order. The equation to all conics having three-point contact with $F=0$ at (x_1, y_1) is $F+\lambda F_1 L=0$, where $L=0$ is the common chord AD.



5. Finally B, C, D all coincide with A. The two conics are said to have four-point contact at A. This is also called contact of the third order. The equation to all conics having four-point contact with $F=0$ at A (x_1, y_1) is $F+\lambda F_1^{\,2}=0$.

Examples

(1) Find the equation to the parabola having four-point contact with the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (at $a \cos\theta$, $b \sin\theta$).

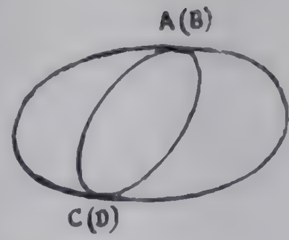
The equation is of the form $F+\lambda F_1^{\,2}=0$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\lambda\left(\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}-1\right)^2=0$$

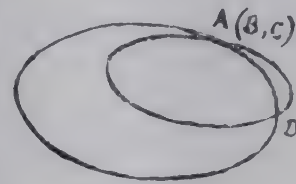
The condition for the parabola is

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\lambda\cos^2\theta}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\lambda\sin^2\theta}{b^2}\right)$$

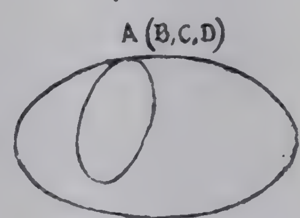
3. B ಬಿಂದು A ಯಲ್ಲಿಯೂ D ಬಿಂದು C ಯಲ್ಲಿಯೂ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಎರಡು ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ A ಮತ್ತು Cಯಲ್ಲಿ ದ್ವಿಸ್ಪರ್ಶವಿದೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. AC ಮತ್ತು BDಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $L=0$, $L'=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $L \equiv L'$. ಆದ್ದರಿಂದ $L=0$ ಜ್ಯಾದ ಕೊನೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ದ್ವಿಸ್ಪರ್ಶವಿರುವ ಶಂಕುಜಗಳ ಸಮೀಕರಣ $F+\lambda L^2=0$.



4. B, C ಗಳು A ಯಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುವು; D ನಿರ್ದಿಷ್ಟ. ಎರಡು ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ Aಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಸ್ಪರ್ಶವಿದೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಎರಡನೆಯ ದರ್ಜೆಯ ಸ್ಪರ್ಶವೆಂದೂ ಕರೆಯುವುದಿದೆ. $F=0$ ಯೊಡನೆ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಸ್ಪರ್ಶವಿರುವ ಎಲ್ಲ ಶಂಕುಜಗಳ ಸಮೀಕರಣ $F+\lambda F_1 L=0$. ಇಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ (AD) ಸಮೀಕರಣ $L=0$.



5. ಕೊನೆಯದಾಗಿ B, C. D ಎಲ್ಲವೂ A ಯಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುವು. ಎರಡು ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಚತುಃಸ್ಪರ್ಶವಿದೆಯೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಮೂರನೆಯ ದರ್ಜೆಯ ಸ್ಪರ್ಶವೆಂದೂ ಕರೆಯುವುದಿದೆ. $F=0$ಯೊಡನೆ $A(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಚತುಃಸ್ಪರ್ಶವಿರುವ ಎಲ್ಲ ಶಂಕುಜಗಳ ಸಮೀಕರಣ $F+\lambda F_1^2=0$



ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ರೊಡನೆ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಚತುಃಸ್ಪರ್ಶವಿರುವ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$F+\lambda F_1^2=0$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪವಿದು.

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\lambda\left(\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}-1\right)^2=0$$

ಪ್ಯಾರಾಬೊಲವಾಗಲು ನಿಯಮ $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\lambda\cos^2\theta}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{\lambda\sin^2\theta}{b^2}\right)$

$$-\quad \lambda^2 \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{a^2\, b^2} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = -1$$

The required equation is

$$\left(\frac{x\sin\theta}{a} - \frac{y\cos\theta}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} - 1\right) = 0$$

(**2**) In the above problem find the rectangular hyperbola of the system.

The condition is

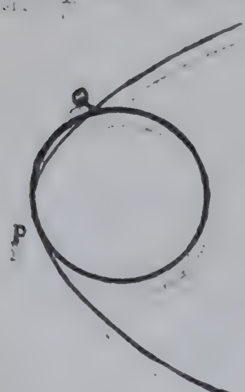
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \lambda\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 0$$

$$\lambda = \frac{-(a^2 + b^2)}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

Further simplification should be done by the student.

(**3**) Find the equation to the circle of curvature at the point $(at^2, 2\,at)$ on the parabola $y^2 = 4\,ax$.

The circle of curvature has a three-point contact with the parabola at 't'. Let the point of contact be P $(at^2,\ 2\,at)$ and the point of intersection be Q. Then the tangent at P and PQ are equally inclined (but in opposite directions) to the axis (x-axis in this case) of the parabola. Therefore the gradient of



PQ is $-\frac{1}{t}$. Equation to PQ is

$$y - 2\,at = -\frac{1}{t}\,(x - at^2)$$

$$x + ty - 3\,at^2 = 0$$

Tangent at P is $x - ty + at^2 = 0$. The equation to the system having three-point contact with the parabola at P is $y^2 - 4\,ax + \lambda\,(x - ty + at^2)\,(x + ty - 3\,at^2) = 0$.

$$- \lambda^2 \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta}{a^2b^2} = 0$$

$$\therefore \lambda = -1$$

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ

$$\left(\frac{x \sin\theta}{a} - \frac{y \cos\theta}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{x \cos\theta}{a} + \frac{y \sin\theta}{b} - 1\right) = 0$$

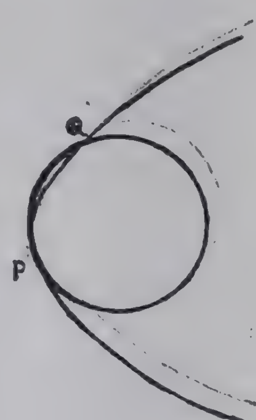
(2) ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದರ ನಿಯಮ $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \lambda\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 0$

$$\therefore \lambda = \frac{-(a^2+b^2)}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

ಉಳಿದ ಸರಳೀಕರಣವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮಾಡಬೇಕು.

(3) $y^2 = 4ax$ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲದ ಮೇಲಿರುವ $(at^2, 2at)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದ ವಕ್ರತಾವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ವಕ್ರತಾವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲದೊಡನೆ t ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಸ್ಪರ್ಶವಿದೆ. ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು $P(at^2, 2at)$ ಆಗಿರಲಿ. ಛೇದನ ಬಿಂದು Q ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೂ PQ ವೂ ಸಮಾನವಾಗಿ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿರುವುವು (ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿ). PQ ವಿನ ಓಟ $-\frac{1}{t}$

PQ ಸಮೀಕರಣ

$$y - 2at = -\frac{1}{t}(x - at^2)$$

$$x + ty - 3at^2 = 0$$

P ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ $x - ty + at^2 = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ಯಾರಾಬೊಲದೊಡನೆ Pಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಸ್ಪರ್ಶವಿರುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y^2 - 4ax + \lambda(x - ty + at^2)(x + ty - 3at^2) = 0$$

The condition for a circle is

$$\lambda = 1 - \lambda t^2$$

$$\lambda = \frac{1}{1+t^2}$$

The circle of curvature is

$$x^2 + y^2 - 2a(2 + 3t^2)x + 4at^3y - 3a^2t^4 = 0$$

Its centre is $[a(2 + 3t^2), -2at^3]$

and radius (called radius of curvature) is $2a\sqrt{(t^2 + 1)^3}$.

(4) Show that the common chords of a circle and a conic are equally inclined to the axes of the conic but in oppsite directions.

Let the conic be F=0 and the given circle intersect it in A, B, C, D. If the equations to AB and CD are L=0 and L′=0, then F=λ LL′=0 represents the system of conics passing through these four common points. Choose the axes of co-ordinates parallel to the axes of the conic. Then $h=0$.

$$F \equiv ax^2+by^2+2gx+2fy+c=0$$

$$F+\lambda LL' \equiv ax^2+by^2+2gx+2fy+c + \lambda(lx+my+n)(l'x+m'y+n')=0$$

It is a circle if $a + \lambda ll' = b + \lambda mm'$ and $\lambda(lm'+l'm) = 0$

$$\therefore \frac{l}{m} = -\frac{l'}{m'}$$ which proves the problem.

(5) Find the condition that the two conics F=0, F′=0 intersect in four concyclic points. Find the centre of the circle in this case.

F+λ F′=0 represents a circle if $a + \lambda a' = b + \lambda b'$, $2h+2\lambda h'=0$

$$\frac{a-b}{a'-b'} = -\lambda = \frac{h}{h'}$$

ವೃತ್ತವಾಗಲು ನಿಯಮ $\lambda = 1 - \lambda t^2$

$$\lambda = \frac{1}{1+t^2}$$

ವಕ್ರತಾವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

$x^2 + y^2 - 2a(2+3t^2)x + 4at^3y - 3a^2t^4 = 0$

ಇದರ ಕೇಂದ್ರ: $[a(2+3t^2), \ -2at^3]$; ತ್ರಿಜ್ಯ (ವಕ್ರತಾತ್ರಿಜ್ಯವೆಂದು ಹೆಸರು) $2a\sqrt{(t^2+1)^3}$

(4) ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಶಂಕುಜ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾಗಳು ಶಂಕುಜದ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಶಂಕುಜ $F=0$ ಆಗಿರಲಿ. ವತ್ತವೃತ್ತ ಇದನ್ನು A, B, C, D ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. AB, CD ಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $L=0$, $L'=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ $F+\lambda LL'=0$ ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಶಂಕುಜ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಶಂಕುಜದ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. ಆಗ $h=0$

$$F \equiv ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$F + \lambda LL' \equiv ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda(lx+my+n)(l'x+m'y+n') = 0$$

ಇದು ವೃತ್ತವಾಗಬೇಕಾದರೆ $a + \lambda ll' = b + \lambda mm'$

ಮತ್ತು $\lambda(lm' + l'm) = 0$

$$\therefore \quad \frac{l}{m} = -\frac{l'}{m'}$$

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆ ಬಿಡಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

(5) $F=0$, $F'=0$ ನಾಲ್ಕು ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲು ನಿಯಮವೇನು ? ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$F + \lambda F' = 0$ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ನಿಯಮ

$a + \lambda a' = b + \lambda b', \quad 2h + 2\lambda h' = 0$

$$\frac{a-b}{a'-b'} = -\lambda = \frac{h}{h'}$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b} = \frac{a'-b'}{b'}$$

The circle is

$$x^2+y^2+\frac{2(gb'-g'b)}{ab'-a'b}x+2\frac{(fb'-f'b)}{ab'-a'b}y$$

$$+\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}=0$$

Centre is $\left[\frac{gb'-g'b}{a'b-ab'}, \frac{fb'-f'b}{a'b-ab'}\right]$

Square of the radius $= \frac{1}{(ab'-a'b)^2}\Big[(gb'-g'b)^2$

$$+(fb'-f'b)^2-(cb'-c'b)(ab'-a'b)\Big]$$

1.21 Confocal conics. Two conics having the same real foci are called confocal conics. The general equation to the conics confocal with the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ is } \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

and confocal with the hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ is } \frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

where λ is any real number.

1.22 Propositions. 1. *Through every point in the plane of the ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *two confocal conics can be drawn; of them one is an ellipse and the other is a hyperbola.*

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b} = \frac{a'-b'}{b'}$$

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ : $x^2+y^2+\dfrac{2(gb'-g'b)}{ab'-a'b}x$

$$+\ 2\ \frac{(fb'-f'b)}{ab'-a'b}y + \frac{cb'-c'b}{ab'-a'b} = 0$$

ಕೇಂದ್ರ : $\left[\dfrac{gb'-g'b}{a'b-ab'},\ \dfrac{fb'-f'b}{a'b-ab'}\right]$

ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗ $=\dfrac{1}{(ab'-a'b)^2}\Big[(gb'-g'b)^2+(fb'-f'b)^2$

$$-(cb'-c'b)\ (ab'-a'b)\ \Big]$$

೧.೨೧ ಸಂನಾಭೀ ಶಂಕುಜಗಳು

ಎರಡು ಶಂಕುಜಗಳ ವಾಸ್ತವನಾಭಿಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ ಸಂನಾಭೀ ಶಂಕುಜಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದೊಡನೆ ಸಂನಾಭೀ ಆಗಿರುವ

ಶಂಕುಜಗಳ ಸಮೀಕರಣ $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2+\lambda}=1$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ಹೈಪರ್ಬೋಲದೊಡನೆ ಸಂನಾಭೀ ಆಗಿರುವ ಶಂಕುಜಗಳ

ಸಮೀಕರಣ $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda}-\dfrac{y^2}{b^2+\lambda}=1.$ ಇಲ್ಲಿ λ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

೧.೨೨ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

1. ದೀರ್ಘವೃತ್ತ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ರ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೂ ಎರಡು ಸಂನಾಭೀ ಶಂಕುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಅವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ, ಇನ್ನೊಂದು ಹೈಪರ್ಬೋಲ.

Let the conic $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ confocal with the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ pass through a given point (x_1, y_1).

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2+\lambda} + \frac{y_1^2}{b^2+\lambda} = 1$$

$$\therefore \quad \phi(\lambda) = (\lambda + a^2)(\lambda + b^2) - x_1^2(\lambda + b^2) - y_1^2(\lambda + a^2)$$

We can suppose $a > b$.

It is clear that



the roots of $\phi(\lambda)$ lie between ∞, $-b^2$; and $-b^2$, $-a^2$. Let these values of λ be λ_1 and λ_2. Then $a^2+\lambda_1$ and $b^2+\lambda_1$ are both positive. But $a^2+\lambda_2$ is positive and $b^2+\lambda_2$ is negative.

Therefore $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda_1} = 1$ is a confocal ellipse and $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda_2} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda_2} = 1$ is a confocal hyperbola passing through the same point.

2. *Confocal conics cut at right angles.*

Let $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda_1} = 1$ and

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_2} = 1$$

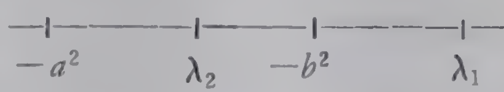
be any two confocal conics confocal with $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Let them cut at (x_1, y_1). Then the product of the gradients of the tangents to these confocals at (x_1, y_1) is

$$\frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} \cdot \frac{x_1^2}{y_1^2}$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ರೊಡನೆ ಸಂನಾಭೀ ಆಗಿರುವ ಶಂಕುಜ

$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$ ಆಗಿರಲಿ. ಇದು (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಲಿ. $\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2+\lambda}=1$

$\phi(\lambda) = (\lambda+a^2)(\lambda+b^2) - x_1^2(\lambda+b^2) - y_1^2(\lambda+a^2)$. ಇಲ್ಲಿ $a>b$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು. $\phi(\lambda)$ದ ಮೂಲಗಳು ∞, $-b^2$ ನಡುವೆಯೂ $-b^2$, $-a^2$ ನಡುವೆಯೂ ಇವೆ ಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. λ ದ ಈ ಬೆಲೆಗಳು λ_1 ಮತ್ತು λ_2 ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ



$a^2+\lambda_1$ ಮತ್ತು $b^2+\lambda_1$ ಎರಡೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ $a^2+\lambda_2$ ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು $b^2+\lambda_2$ ಋಣಾತ್ಮಕ. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}=1$ ಒಂದು ಸಂನಾಭೀ ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಮತ್ತು $\frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}=1$ ಒಂದು ಸಂನಾಭೀ ಹೈಪರ್ಬೋಲ. ಇವೆರಡೂ ದತ್ತಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುತ್ತವೆ.

2. ಸಂನಾಭೀ ಶಂಕುಜಗಳು ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}=1 \text{ ಮತ್ತು}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}=1$$

ಎರಡು ಸಂನಾಭೀ ಶಂಕುಜಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇವು $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದೊಡನೆ ಸಂನಾಭಿಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದು (x_1, y_1) ರಲ್ಲಿ ಇವುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} \cdot \frac{x_1^2}{y_1^2}$

Since (x_1, y_1) lies on both the confocals we have

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda_1} - \frac{x_1^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{y_1^2}{b^2+\lambda_1} - \frac{y_1^2}{b^2+\lambda_2} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} \cdot \frac{x_1^2}{y_1^2} = -1$$

Hence the proposition.

3. *Only one confocal conic touches a given line.*

Let $y=mx+c$ touch $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$

$$\therefore \quad c^2=(a^2+\lambda)m^2+b^2+\lambda$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{c^2-a^2m^2-b^2}{1+m^2}$$

This gives only one value for λ. Hence the proposition.

Examples

(1) Find the locus of the poles of a given line with respect to a confocal system.

Let (x_1, y_1) be the pole of $L \equiv lx + my + n = 0$ for $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$

$$\therefore \quad \frac{xx_1}{a^2+\lambda} + \frac{yy_1}{b+\lambda} - 1 = 0$$

and $lx+my-n = 0$ are identical.

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{x_1}{a^2+\lambda}}{l} = \frac{\dfrac{y_1}{b^2+\lambda}}{m} = \frac{1}{n}$$

$\therefore$ Locus of (x_1, y_1) is $n\left(\dfrac{x}{l} - \dfrac{y}{m}\right) + a^2 - b^2 = 0$

It is a straight line perpendicular to $L = 0$. The student should prove that this straight line passes through the point of contact of the unique confocal touching $L = 0$.

(x_1, y_1) ಎರಡು ಸಂನಾಭಿಗಳ ಮೇಲೆಯೂ ಇರುವುದರಿಂದ

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda_1} - \frac{x_1^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{y_1^2}{b^2+\lambda_1} - \frac{y_1^2}{b^2+\lambda_2} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} \quad \frac{x_1^2}{y_1^2} = -1$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧಿತವಾಯಿತು.

3. ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಂನಾಭಿ ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು.

$y = mx + c$ ರೇಖೆ $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ ನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲಿ.

$$\therefore \quad c^2 = (a^2+\lambda)m^2 + b^2 + \lambda$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{c^2 - a^2m^2 - b^2}{1+m^2}$$

ಇದು λ ಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧಿತ ವಾಯಿತು

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : (1) ಒಂದು ಸಂನಾಭೀ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಧ್ರುವಗಳ ಪಥ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ ನ್ನು ಕುರಿತು $L \equiv lx + my + n = 0$ ಯ ಧ್ರುವ

(x_1, y_1) ಆಗಿರಲಿ. $\therefore \quad \frac{xx_1}{a^2+\lambda} + \frac{yy^2}{b^2+\lambda} = 1$

ಮತ್ತು $lx + my + n = 0$ ಸರ್ವಸಮ.

$$\therefore \quad \frac{\frac{x_1}{a^2+\lambda}}{l} = \frac{\frac{y_1}{b^2+\lambda}}{m} = \frac{1}{n}$$

$\because \quad (x_1, y_1)$ ರ ಪಥ $n\left(\frac{x}{l} - \frac{y}{m}\right) + a^2 - b^2 = 0$

ಇದು $L = 0$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಈ ಸರಳರೇಖೆ $L = 0$ ಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಏಕೈಕ ಸಂನಾಭಿಯ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

(2) Show that the locus of a point such that a tangent drawn from it to one confocal is perpendicular to the tangent drawn to the other is a concentric circle (called their co-director circle).

Let the confocals be

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_1} = 1 \qquad \text{and}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_2} = 1$$

$y = mx + \sqrt{(a^2+\lambda_1)\,m^2 + b^2 + \lambda_1}$ is a tangent to the first.

$$y = -\frac{1}{m}x + \sqrt{\frac{a^2+\lambda_2}{m^2} + b^2 + \lambda_2}$$

is a tangent to the second. To find the locus of their intersection eliminate m between them. The eliminant is

$$(y-mx)^2 + (my+x)^2 = (a^2+\lambda_1)m^2 + b^2 + \lambda_1$$
$$+ a^2 + \lambda_2 + (b^2+\lambda_2)\,m^2$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + \lambda_1 + \lambda_2$$

which is a concentric circle.

Miscellaneous Worked out Examples

(1) Discus fully $F=0$ when it represents a parabola.

$$F \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$ab - h^2 = 0$. $\therefore$ 2nd degree terms form a perfect square.

$$\therefore F \equiv (Ax+By)^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$\therefore (Ax+By+\lambda)^2 = \lambda^2 + 2\lambda(Ax+By)$$
$$-2gx - 2fy - c$$
$$= 2x(A\lambda - g) + 2y(\lambda B - f) + \lambda^2 - c$$

Choose λ such that

$Ax + By + \lambda = 0$ and

(2) ಎರಡು ಸಂನಾಭಿಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಒಂದು ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯವೃತ್ತ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. (ಇದರ ಹೆಸರು ಸಹಚಾಲಕವೃತ್ತ).

ಆ ಸಂನಾಭಿಗಳು $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda_1} = 1$ ಮತ್ತು

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_2} = 1 \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

$y = mx + \sqrt{(a^2+\lambda_1)m^2 + b^2 + \lambda_1}$ ಒಂದನೆಯದಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ.

ಎರಡನೆಯದಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ

$$y = -\frac{1}{m}x + \sqrt{\frac{a^2+\lambda_2}{m^2} + b^2 + \lambda^2}$$

ಇವುಗಳ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಡುವೆ m ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಬೇಕು.

$$\therefore \quad (y-mx)^2 + (my+x)^2 = (a^2+\lambda_1)m^2 + b^2 + \lambda_1 + a^2 + \lambda_2 + (b^2+\lambda_2)m^2$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + \lambda_1 + \lambda_2$$

ಇದೊಂದು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯವೃತ್ತ.

ವಿವಿಧ ಬಿಡಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು

(1) F=0 ಪ್ಯಾರಾಬೊಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಆ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಿ.

$$F \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \; ab - h^2 = 0$$

$\therefore$ 2ನೆಯ ಘಾತದ ಪದಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿವೆ.

$$\therefore \quad F \equiv (Ax+By)^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$(Ax+By+\lambda)^2 = \lambda^2 + 2\lambda(Ax+By) - 2gx - 2fy - c$$

$$= 2x(A\lambda - g) + 2y(\lambda B - f) + \lambda^2 - c$$

$2(A\lambda - g)x + 2(B\lambda - f)y + \lambda^2 - c = 0$ are at right angles. This gives

$$\lambda = \frac{Ag + Bf}{A^2+B^2}$$

The standard equation to the parabola $y^2=4ax$ can be inter preted as follows: "There are two mutually perpendicular straight lines. A point moves such that the square of its distance from one of them varies as its distance from the other. The constant of variation is the latus rectum of the parabola."

We shall therefore rearrange the equation as follows:

$$\left[\frac{Ax + By + \lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right]^2 \quad (A^2 + B^2)$$

$$= \frac{2\sqrt{(A\lambda-g)^2+(B\lambda-f)^2}}{A^2+B^2} \cdot \frac{2(A\lambda-g)x+2(B\lambda-f)y+\lambda^2-c}{\sqrt{4(A\lambda-g)^2 + 4(B\lambda-f)^2}}$$

$\therefore$ For this parabola $Ax + By + \lambda = 0$ is the axis. The tangent at the vertex is

$$2(A\lambda-g)x + 2(B\lambda-f)y + \lambda^2-c=0$$

Now $$A\lambda-g = \frac{B(Af - Bg)}{A^2 + B^2}$$

$$B\lambda-f = \frac{-A(Af - Bg)}{A^2 + B^2}$$

$\therefore$ The tangent at the vertex is

$$2(Af - Bg)(Bx - Ay)(A^2 + B^2) + (Ag + Bf)^2 - c(A^2 + B^2)^2 = 0$$

The length of the latus rectum is

$$\frac{2\sqrt{(A\lambda-g)^2 + (B\lambda-f)^2}}{A^2 + B^2}$$

$$= \frac{2(Af - Bg)}{(A^2 + B^2)^{3/2}}$$

$Ax+By+\lambda=0$ ಮತ್ತು $2(A\lambda-g)x+2(B\lambda-f)y+\lambda^2-c=0$ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ λವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. ಇದರಿಂದ

$$\lambda = \frac{Ag+Bf}{A^2+B^2}$$

ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಶಿಷ್ಟ ಸಮೀಕರಣ y^2+4ax ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅರ್ಥವಿಸಬಹುದು: "ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಚರಬಿಂದು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಅದರ ದೂರದ ವರ್ಗ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಅದರ ದೂರದ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ನಾಭೀಲಂಬ". ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪುನರ್ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\left[\frac{Ax+By+\lambda}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]^2 \quad (A^2+B^2)$$

$$= \quad \frac{2\sqrt{(A\lambda-g)+(B\lambda-f)^2}}{A^2+B^2} \cdot \frac{2(A\lambda-g)x+2(B\lambda-f)y+\lambda^2-c}{\sqrt{4(A\lambda-g)^2+4(B\lambda-f)^2}}$$

$\therefore$ ಈ ಪ್ಯರಾಬೊಲಕ್ಕೆ $Ax+By+\lambda=0$ ಅಕ್ಷ. ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ $2(A\lambda-g)x+2(B\lambda-f)y+\lambda^2-c=0$

ಈಗ $A\lambda-g = \dfrac{B(Af-Bg)}{A^2+B^2}$

$$B\lambda-f = \frac{-A(Af-Bg)}{A^2+B^2}$$

$\therefore$ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸಮೀಕರಣ

$$2(Af-Bg)(Bx-Ay)(A^2+B^2)+(Ag+Bf)^2 - c(A^2+B^2)^2 = 0$$

$\therefore$ ನಾಭೀಲಂಬದ ಉದ್ದ $= \dfrac{2\sqrt{(A\lambda-g)^2+(B\lambda-f)^2}}{A^2+B^2}$

$$= \frac{2(Af-Bg)}{(A^2+B^2)^{3/2}}$$

The latus rectum is parallel to the tangent at the vertex at a distance $\frac{1}{4}$ × (latus rectum) from the vertex. Let the equation to the latus rectum be

$$2(Af - Bg)\ (Bx - Ay)\ (A^2 + B^2) + (Ag + Bf)^2$$
$$- c\,(A^2 + B^2)^2 + c' + = 0$$

∴ Applying the condition mentioned above we have

$$c' = -(Af - Bg)^2$$

∴ The equation to the latus rectum is

$$2(Af - Bg)\ (Bx - Ay)\ (A^2 + B^2) + (Ag + Bf)^2$$
$$- c\,(A^2 + B^2)^2 - (Af - Bg)^2 = 0$$

In a similar way the student should find out the equation to the directrix of the parabola and compare it with the Note (i) in § 1.18.

(2) Show that through four given points no three of which are collinear two parabolas and one rectangular hyperbola will pass.

Let the four given points be the common points of $F = 0$ and $F' = 0$. The system of conics passing through these points is $F + \lambda F' = 0$. Condition for parabola is

$$(a + \lambda a')\ (b + \lambda b') = (h + \lambda h')^2$$

The two roots of this quadratic in λ show that there are two parabolas of the system. The condition for a rectangular hyperbola is $a + \lambda a' + b + b\lambda b' = 0$. It gives only one value for λ.

(3) Find the locus of the centres of a four-point system of conics.

Let the system be $F + \lambda F' = 0$. If $(\bar{x}, \bar{y})$ be the centre of one member we have $(a + \lambda a')\,\bar{x} + (h + \lambda h')\,\bar{y} + g + \lambda g' = 0$

$$(h + \lambda h')\,\bar{x} + (b + \lambda b')\,\bar{y} + f + \lambda f' = 0$$

The locus of $(\bar{x}, \bar{y})$ is (eliminate λ)

$$(ax + hy + g)\,(h'x + b'y + f') - (hx + by + f)\,(a'x + h'y + g') = 0$$

which is a conic.

ನಾಭೀಲಂಬ ಶೃಂಗಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಶೃಂಗದಿಂದ $\frac{1}{4}\times$ (ನಾಭೀಲಂಬ) ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ನಾಭೀಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣ

$$2(\mathrm{A}f-\mathrm{B}g)(\mathrm{B}x-\mathrm{A}y)(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)+(\mathrm{A}g+\mathrm{B}f)^2$$
$$-c(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)+c'=0$$ ಆಗಿರಲಿ.

ಮೇಲಿನ ಗುಣವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ

$$c'=-(\mathrm{A}f-\mathrm{B}g)^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಭೀಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣ

$$2(\mathrm{A}f-\mathrm{B}g)(\mathrm{B}x-\mathrm{A}y)(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)+(\mathrm{A}g+\mathrm{B}f)^2-c(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)^2$$
$$-(\mathrm{A}f-\mathrm{B}g)^2=0$$

ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು §1·18 ರ ಸೂಚನೆ (i) ರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸ ಬೇಕು.

(2) ಯಾವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳೂ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿರದಂತೆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದು ಗಳಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎರಡು ಪ್ಯರಾಬೊಲಗಳೂ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾವೂ ಸಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಆ ನಾಲ್ಕು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು $\mathrm{F}=0$, $\mathrm{F}'=0$ ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಶಂಕುಜವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣ $\mathrm{F}+\lambda\mathrm{F}'=0$. ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ನಿಯಮ $(a+\lambda a')(b+\lambda b')=(h+\lambda h')^2$ λ ದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರುವ ಇದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿವೆ ; ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಪ್ಯರಾಬೊಲಗಳಿವೆ. ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲದ ನಿಯಮ

$a+\lambda a'+b+\lambda b'=0$. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ λ ಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬೆಲೆ.

(3) ನಾಲ್ಕು-ಬಿಂದು ಶಂಕುಜವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಕೇಂದ್ರಪಥವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವ್ಯವಸ್ಥೆ $\mathrm{F}+\lambda\mathrm{F}'=0$ ಆಗಿರಲಿ. $(\bar{x},\ \bar{y})$ ಒಂದು ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರ ವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$(a+\lambda a')\bar{x}+(h+\lambda h^1)\bar{y}+g+\lambda g'=0$$
$$(h+\lambda h')\bar{x}+(b+\lambda b')\bar{y}+f+\lambda f'=0$$

$\therefore$ $(\bar{x},\bar{y})$ ಯ ಪಥ (λ ವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಬೇಕು)

$$(ax+hy+g)(h'x+b'y+f')-(hx+by+f)(a'x+h'y+g')=0.$$

ಇದೊಂದು ಶಂಕುಜ.

(4) Find the equation to the parabola which touches $F=0$ at the intersections of $L \equiv lx+my+n=0$.

The required parabola is having double contact with $F=0$ at the common points between the conic and the given line. Therefore choose λ such that $F+\lambda L^2=0$ is a parabola.

$$\lambda = \frac{h^2 - ab}{am^2 + bl^2 - 2\,hlm}$$

(5) Prove that if two conics have double contact the polar of the centre of either with respect to the other is parallel to the chord of contact.

The system is $F+\lambda L^2=0$. If the centre of $F=0$ is $(\bar{x}, \bar{y})$ we have $a\bar{x}+h\bar{y}+g=0$

$$h\bar{x}+b\bar{y}+f=0$$

The polar of $(\bar{x}, \bar{y})$ with respect to $F+\lambda L^2=0$ is

$$(a\bar{x}+h\bar{y}+g)x+(h\bar{x}+b\bar{y}+f)y+g\bar{x}+f\bar{y}+c$$
$$+\lambda\,[l^2 x\bar{x}+m^2 y\bar{y}+lm\,(x\bar{y}+\bar{x}y)$$
$$+ln\,(x+\bar{x})+mn\,(y+\bar{y})+n^2]=0$$

The first two terms vanish. Gradient of this polar is

$$-\frac{l}{m}\times\frac{l\bar{x}+m\bar{y}+n}{l\bar{x}+m\bar{y}+n} = -\frac{l}{m}$$

which is the gradient of the chord of contact. Hence the problem.

The student should try an alternative method by writing

$$F+\lambda F' \equiv L^2$$

(6) Prove that the four directrices of a central conic pass through the points common to the conic and its director circle.

Take the standard equation of an ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

(4) $F=0$ ಯನ್ನು $L \equiv lx+my+n=0$ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಂಥ ಶಂಕುಜಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ (ದ್ವಿಸ್ಪರ್ಶ) $F+\lambda L^2=0$. ಇದು ಪ್ಯರಾಬೊಲವಾಗುವಂತೆ λವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು.

$$\therefore \quad \lambda=\frac{h^2-ab}{am^2+bl^2-2hlm}$$

(5) ಎರಡು ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ ದ್ವಿಸ್ಪರ್ಶವಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಂಕುಜವನ್ನು ಕುರಿತು ಇನ್ನೊಂದು ಶಂಕುಜಕೇಂದ್ರದ ಧ್ರುವೀಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ವ್ಯವಸ್ಥೆ $F + \lambda L^2 = 0$. $F = 0$ ಯ ಕೇಂದ್ರ $(\bar{x}, \bar{y})$ ಆಗಿದ್ದರೆ $a\bar{x}+h\bar{y}+g=0$, $h\bar{x}+b\bar{y}+f=0$. $F+\lambda L^2=0$ ಯನ್ನು ಕುರಿತು $(\bar{x}, \bar{y})$ಯ ಧ್ರುವೀಯ

$$\begin{aligned}(a\bar{x}+h\bar{y}+g)x+(h\bar{x}+b\bar{y}+f)\,y+g\bar{x}+f\bar{y}+c \\ +\ \lambda[l^2 x\bar{x}+m^2 y\bar{y}+lm\,(x\bar{y}+\bar{x}y) \\ +ln\,(x+\bar{x})+mn(y+\bar{y})+n^2]=0\end{aligned}$$

ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು ಮಾಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಧ್ರುವೀಯದ

$$\text{ಓಟ} = -\frac{l}{m}\times\frac{l\bar{x}+m\bar{y}+n}{l\bar{x}+m\bar{y}+n} = -\frac{l}{m}$$

ಇದು ಸ್ಪರ್ಶಕಜ್ಯಾದ ಓಟವೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಾಧಿತವಾಯಿತು. $F+\lambda F' \equiv L^2$ ಎಂದು ಬರೆದು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ ವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

(6) ಒಂದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಶಂಕುಜದ ನಾಲ್ಕು ಚಾಲಕಗಳು ಶಂಕುಜಕ್ಕೂ ಅದರ ಚಾಲಕವೃತ್ತಕ್ಕೂ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಶಿಷ್ಟರೂಪವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Its director circle is

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Their common points are given by

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda (x^2 + y^2 - a^2 - b^2) = 0$$

Choose λ such that the coefficient of $y^2 = 0$

$$\frac{1}{b^2} + \lambda = 0$$

The conic degenerates into

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 - \frac{1}{b^2} (x^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{a^4}{a^2 - b^2} = \frac{a^2}{e^2}$$

$$x = \pm \frac{a^2}{e^2}$$

These are the two real directrices. By choosing $\lambda = -\frac{1}{a^2}$ we get the remaining two directries. The student should extend the argument to a hyperbola.

(7) A family of circles is drawn with (x', y') as centre to cut the conic F=0. Prove that the locus of the middle points of the chords of intersection is the rectangular hyperbola

$$(x-x')(hx+by+f)-(y-y')(ax+hy+g) = 0$$

The equation to the system is

$$F+\lambda[(x-x')^2+(y-y')^2-r^2]=0$$

$$\therefore \quad (a+\lambda)x^2+2hxy+(b+\lambda)y^2+2(g-\lambda x')x+2(f-\lambda y')y+c$$

$$+\lambda(x'^2+y'^2-r^2) = 0$$

ಇದರ ಚಾಲಕವೃತ್ತ

$$x^2+y^2 = a^2+b^2$$

ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1+\lambda(x^2+y^2-a^2-b^2) = 0$$ ಈ ಸಮೀಕರಣ

ನೀಡುತ್ತದೆ. y^2ದ ಗುಣಾಂಕ ಶೂನ್ಯವಾಗುವಂತೆ λ ವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. $\frac{1}{b^2}+\lambda=0$ ಆಗ ಶಂಕುಜದ ವಿಕೃತರೂಪ

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 - \frac{1}{b^2}(x^2-a^2-b^2)=0$$ ದೊರೆಯುವುದು.

$$\therefore \quad x^2 = \frac{a^4}{a^2-b^2} = \frac{a^2}{e^2}$$

$$x = \pm \frac{a}{e}$$

ಇವು ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಚಾಲಕಗಳು. $\lambda = -\frac{1}{a^2}$ ಎಂದು ಆರಿಸಿದಾಗ ಉಳಿದ ಎರಡು ಚಾಲಕಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇದೇ ತರಹದ ವಾದವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಹೈಪರ್ಬೋಲಾಕ್ಕೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕು.

(7) (x', y') ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ $F=0$ ಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವಂತೆಯೂ ಒಂದು ವೃತ್ತವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಪಥ $(x-x')(hx+by+f) - (y-y')(ax+hy+g) = 0$ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$F+\lambda[(x-x')^2 + (y-y')^2 - r^2] = 0$$

$$(a+\lambda)x^2 + 2hxy + (b+\lambda)y^2 + 2(g-\lambda x')x$$

$$+ 2(f-\lambda y')y+c+\lambda(x'^2+y'^2-r^2) = 0$$

The centre is given by

$$(a+\lambda)x+hy+(g-\lambda x')=0$$

$$hx+(b+\lambda)y+(f-\lambda y')=0$$

The centre-locus is got by eliminating λ. It is $(x-x')(hx+by+f)-(y-y')(ax+hy+g)=0$.

(**8**) Prove Newton's theorem, namely, O is a variable point in the plane of a conic. Lines OPQ and ORS are drawn through O in fixed directions to cut the conic in P, Q, R, S. Show that OP.OQ : OR.OS is a constant.

Let O be the point (x_1, y_1). Let the equation to OPQ be $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = r$. Any point on the line is $(lr+x_1, mr+y_1)$. Choose r such that it lies on $F=0$. Then $r^2(al^2+2hlm+bm^2)+2r(alx_1+hly_1+hmx_1+bmy_1+gl+fm)+F_{11}=0$. OP and OQ are the two roots of this quadratic equation in r.

$$\therefore \quad OP.OQ = \frac{F_{11}}{al^2+2hlm+bm^2}$$

Similarly

$$OR.OS = \frac{F_{11}}{al'^2+2hl'm'+bm'^2}$$

$$\therefore \quad \frac{OP.OQ}{OR.OS} =$$ a constant depending on l, m, l', m' —*i.e.*, on the fixed directions of the secants.

Exercises 1.2

1. Prove that if three conics have one chord common to all their three other chords are concurrent.

ಇದರ ಕೇಂದ್ರ $(a+\lambda)x+hy+(g-\lambda x')=0$

$$h\,x+(b+\lambda)y+(f-\lambda y')=0$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ λವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ಕೇಂದ್ರಪಥ ದೊರೆಯುವುದು. ಅದು

$$(x-x')\,(hx+by+f)-(y-y')\,(ax+hy+g)=0$$

(8) ನ್ಯೂಟನ್ನನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು — ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಶಂಕುಜದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ O ಬಿಂದುವನ್ನು ಆರಿಸಿದೆ. OPQ, ORS ಎಂಬ ಎರಡು ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರ ದಿಶೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ ಶಂಕುಜವನ್ನು P, Q, R, S ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆಯೂ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. OA·OQ : OR·OS ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವೆಂದು—ಸಾಧಿಸಿ.

O ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಆಗಿರಲಿ. OPQ ಸಮೀಕರಣ

$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=r$ ಆಗಿರಲಿ. ಇದರ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದು $(lr+x_1,\ mr+y_1)$.

ಈ ಬಿಂದು $F=0$ ಮೇಲಿರುವಂತೆ r ನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು.

$$\therefore\quad (al^2+2hlm+bm^2)\,r^2+2\,(alx_1+hly_1+hmx_1+bmy_1+gl+fm)r+F_{11}=0$$

OP, OQ ಗಳು rನ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು.

$$\therefore\quad OP.OQ=\frac{F_{11}}{al^2+2\,hlm+bm^2}$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ $OR.OS=\dfrac{F_{11}}{al'^2+2hl'm'+bm'^2}$

$\therefore\quad \dfrac{OP.OQ}{OR.OS}=l, m,\ l',\ m'$ ಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ;

ಅಂದರೆ ಛೇದಕಗಳ ಸ್ಥಿರದಿಶೆಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ ೧.೨

1. ಮೂರು ಶಂಕುಜಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ ಇದೆ. ಅವುಗಳ ಉಳಿದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾಗಳು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

[ಆ ಶಂಕುಜಗಳು $F_1=F_2=F_3=0$ ಆಗಿರಲಿ. $L=0$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾವೂ; F_1, F_2ರ ಸಾಮಾನ್ಯಜ್ಯಾ M_1; F_2, F_3ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ M_2; F_3, F_1ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾ M_3 ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

2. Prove that the centre-locus of the conics passing through the same set of four concyclic points is a rectangular hyperbola.

3. Prove that the equation to the axes of the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ is

$$xy(a-b) = h(x^2-y^2)$$

4. The eccentricitry e of the central conic $ax^2+2hxy+by^2=1$ is given by $(ab-h^2)\,e^4+[\,(a-b)^2+4h^2]\;(e^2-1)=0$

5. Show that every conic passing through the same set of four concyclic points on a given ellipse will have its axes parallel to the axes of the ellipse.

6. Prove that the equation to a pair of directrices of the conic $F=0$ is of the form $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \lambda F = 0$

7. Interpret the equation

$$(lx+my+n)\,(mx-ly+p)=l^2+m^2$$

8. Prove that all conics passing through the intersections of two rectangular hyperbolas are rectangular hyperbolas.

$$F_1+\lambda F_2 \equiv LM_1$$
$$F_2+\mu F_3 \equiv LM_2$$
$$F_3+\nu F_1 \equiv LM_3$$

M_1, M_2, M_3 ಇವು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ $M_1+l M_2+m M_3\equiv 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ l, m ಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು.

$$\therefore \quad \frac{F_1+\lambda F_2}{L}+l.\frac{F_2+\mu F_3}{L}+m.\frac{F_3+\nu F_1}{L}\equiv 0$$

$$\therefore \quad 1+m\nu=0 \qquad \therefore \quad m=-\frac{1}{\nu}$$
$$\therefore \quad l+\lambda=0 \qquad \therefore \quad l=-\lambda$$
$$\therefore \quad m+l\mu=0 \qquad \therefore \quad \frac{l}{m}=\lambda\nu=-\frac{1}{\mu}$$
$$\therefore \quad \lambda\mu\nu=1 \qquad]$$

2. ದತ್ತ ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದೇ ಗಣದ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಶಂಕುಜಗಳ ಕೇಂದ್ರಪಥ ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3. $ax^2+2hxy+by^2=1$ ಶಂಕುಜದ ಅಕ್ಷಗಳ ಸಮೀಕರಣ $xy(a-b)=h(x^2-y^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4. $ax^2+2hxy+by^2=1$ ಶಂಕುಜದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ e ಯನ್ನು $(ab-h^2)e^2+[(a-b)^2+4h^2](e^2-1)=0$ ಸಮೀಕರಣ ನೀಡುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ಒಂದು ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ದತ್ತ ಚಕ್ರೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಶಂಕುಜಗಳ ಅಕ್ಷಗಳೂ ಆ ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $F=0$ ಶಂಕುಜದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಚಾಲಕಗಳ ರೂಪ $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\lambda F=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $(lx+my+n)(mx-ly+p)=l^2+p^2$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅರ್ಥವಿಸಿ,

8. ಎರಡು ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಶಂಕುಜಗಳೂ ಲಂಬೀಯ ಹೈಪರ್ಬೋಲಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. A parabola has a four-point contact with $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy=0$ at the origin. Show that the equation to its directrix is $2Ggx+2Fy+g^2+f^2=0$. Prove further that if ψ be the angle made by the axis of the parabola with the tangent at the origin $\tan\psi = \dfrac{fF+gG}{fG\sim gF}$

10. If the lines $y=m_1x$ and $y=m_2x$ are equal diameters of $ax^2+2hxy+by^2=1$, show that $(a-b)(m_1+m_2)-2h(1-m_1m_2)=0$. Deduce the equation to a pair of equiconjugate diameters.

11. Show that the centre-locus of conics having a four-point contact with the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ at $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ is the line $bx\sin\theta - ay\cos\theta = 0$.

12. A system of conics is drawn having four-point contact with the conic $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy=0$ at the origin. Show that the director circles of the system form a co-axial system whose limiting points are the origin and

$$\left(\frac{-fh}{a^2+h^2},\quad \frac{af}{a^2+h^2}\right).$$

13. Show that if $54ah^2+(2a-b)^3=0$ then the four normals drawn from the origin to the conic $ax^2+2hxy+by^2+2fy=0$ form a harmonic pencil.

14. An ellipse whose semiaxes are a and b touches the x-axis at the origin. Show that its centre lies on

$$x^2y^2+(y^2-a^2)(y^2-b^2)=0$$

15. $F=0$ and $F'=0$ have a pair of common chords $L=0$, $L'=0$ such that $F-F'\equiv LL'$. Prove that $\lambda^2L^2-2\lambda(F+F')+L'^2=0$ represents a conic having double contact with each of the conics $F=0$, $F'=0$.

9. ಒಂದು ಪ್ಯರಾಬೊಲಕ್ಕೆ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy=0$ ಯೊಡನೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು-ಬಿಂದು ಸ್ಪರ್ಶವಿದೆ. ಅದರ ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣ $2Gx+2Fy+g^2+f^2=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಇವುಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ ψ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\tan\psi = \frac{fF+gG}{fG+\sim gF}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. $y=m_1x$ ಮತ್ತು $y=m_2x$ ಗಳು $ax^2+2hxy+by^2=1$ ಶಂಕುಜದ ಸಮಾನ ಉದ್ದದ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $(a-b)(m_1+m_2) - 2h(1-m_1m_2) = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾನಾನುವರ್ತಿ ವ್ಯಾಸಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ದೀರ್ಘವೃತ್ತ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ರೊಡನೆ $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು-ಬಿಂದು ಸ್ಪರ್ಶವಿರುವ ಶಂಕುಜಗಳ ಕೇಂದ್ರಪಥ $bx\sin\theta - ay\cos\theta = 0$ ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy=0$ ಶಂಕುಜದೊಡನೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು-ಬಿಂದು ಸ್ಪರ್ಶವಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಶಂಕುಜ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಚಾಲಕವೃತ್ತಗಳು $\left(\frac{-fh}{a^2+h^2},\ \frac{af}{a^2+h^2}\right)$ ಮಿತಿಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

13. $54\,ab^2 + (2a-b)^3 = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ $ax^2+2hxy+by^2+2fy=0$ಗೆ ಎಳೆದ ನಾಲ್ಕು ಲಂಬಗಳು ಒಂದು ಸಂಗತ ಕಿರಣ ಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ,

14. ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಅರ್ಧಾಕ್ಷಗಳು a, b. ಅದು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ಅದರ ಕೇಂದ್ರಪಥ

$x^2y^2+(y^2-a^2)(y^2-b^2)=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

15. $F=0$, $F'=0$ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾಗಳು $L=0$, $L'=0$; ಮತ್ತು ಇಲ್ಲಿ $F-F'\equiv LL'$. $F=0$, $F'=0$ ಶಂಕುಜಗಳೊಡನೆ ದ್ವಿಸ್ಪರ್ಶವಿರುವ ಶಂಕುಜದ ಸಮೀಕರಣ $\lambda^2L^2-2\lambda(F+F')+L'^2=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16. A pair of tangents to any confocal of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passes through the fixed point $(0, c_1)$ and $(0, c_2)$. Show that the intersection of the tangents lies on the circle.

$$(c_1 + c_2)(x^2 + y^2 - a^2 + b^2) = 2y(c_1 c_2 - a^2 + b^2)$$

17. Two confocals of $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

are $\frac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_1} = 1$ and $\frac{x^2}{a^2+\lambda^2} + \frac{y^2}{b^2+\lambda^2} = 1$

If they pass through (x_1, y_1) show that

$$\lambda_1 + \lambda_2 = x_1^2 + y_1^2 - a^2 - b^2$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -(b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2)$$

18. Prove that the angle between the pair of tangents from P to $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ can be put in the form $2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}$ where λ_1, λ_2 are the parameters of the confocals through P.

19. Prove that the difference of the squares of the perpendiculars drawn from the centre on any two parallel tangents to two given confocals is constant.

20. Show that if the normals at the points in which the conic $ax^2 + by^2 = 1$ is cut by the lines $lx + my = 1$ and $l'x + m'y = 1$ are concurrent then $\frac{ll'}{a} = \frac{mm'}{b} = -1$. Show that if one of these passes through a fixed point the other touches a fixed parabola.

16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು $(0,\ c_1)$, $(0,\ c_2)$ ಸ್ಥಿರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುವು. ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು $(c_1+c_2)\ (x^2+y^2-a^2+b^2) = 2y\ (c_1 c_2-a^2+b^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

17. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ರ ಸಂನಾಭೀ ಶಂಕುಜಗಳು

$\frac{x^4}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}=1,\quad \frac{x'}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}=1.$ ಇವು $(x_1,\ y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ

$$\lambda_1+\lambda_2 = x_1{}^2+y_1{}^2-a^2-b^2$$
$$\lambda_1\,\lambda_2 = -\,(b^2x_1{}^2+a^2y_1{}^2-a^2b^2)$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು $2\ \tan^{-1}\sqrt{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. λ_1, λ_2 ಗಳು P ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸಂನಾಭಿಗಳ ಪ್ರಾಚಲಗಳು.

19. ಎರಡು ದತ್ತ ಸಂನಾಭಿಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

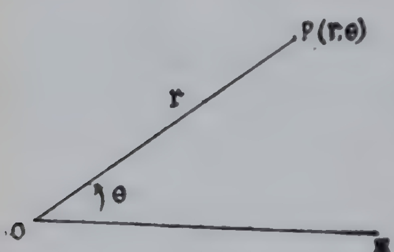
20. ax^2+by^2+1 ಶಂಕುಜವನ್ನು $lx+my=1$ ಮತ್ತು $l'x+m'y=1$ ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿದ್ದರೆ $\frac{ll'}{a}=\frac{mm'}{b}=-1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಒಂದು ಪ್ಯರಾಬೊಲವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

CHAPTER 2

POLAR EQUATIONS

2.1 The position of a point in a plane can be fixed by means of two independent magnitudes. These magnitudes are called the coordinates of the point, and can be selected in various ways. The coordinates most commonly used are the Cartesian rectangular coordinates which measure the distances of the point from two fixed mutually perpendicular lines. The student would also have used on some occasions oblique coordinates which measure the distances of the point parallel to a pair of non-perpendicular lines.

We now introduce a different system, which associates with each point, a distance and an angle.



Let O be a fixed point and Ox a fixed line through O. O is called the origin or *pole* and Ox the *initial line*. Let P be any point in the plane.

If r is the distance OP and θ the angle xOP measured from Ox in the counter-clockwise direction, (r, θ) are called the *polar coordinates* of P. Given the values of r and θ, the position of P is obviously easily constructed, and is unique. Given P however, the values of r and θ are not uniquely determined, for the same point P can be described by the coordinates $(r, \theta+2n\pi)$, and also by $[-r, \theta+(2m+1)\pi]$, where n and m may be any integers positive or negative.

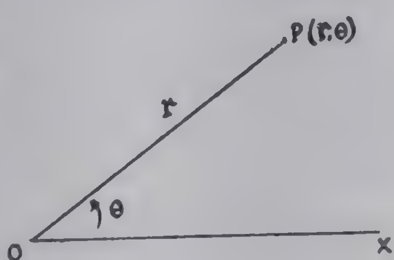
ಅಧ್ಯಾಯ ೨

ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

೨.೧ ಒಂದು ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಈ ಪರಿಮಾಣಗಳಿಗೆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಇವನ್ನು ಹಲವು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ಅಧಿಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ನಿರ್ದೇಶಗಳಾವುವೆಂದರೆ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. ಇವು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಇರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುತ್ತವೆ. ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರದೆ ಇರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಬಿಂದುವಿನ ಓರೆ ನಿರ್ದೇಶಕ ಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರ ಬಹುದು.

ಈಗ ಬೇರೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ, ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿಗೂ ಒಂದು ದೂರ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಲಾಗುವುದು.

O ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬಿಂದು, Ox ಎಂಬುದು O ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರರೇಖೆ. Oನ್ನು **ಮೂಲಬಿಂದು** ಅಥವಾ **ಧ್ರುವ** ಎಂದೂ, Ox ನ್ನು **ಮೂಲರೇಖೆ** ಎಂದೂ ಕರೆಯುವೆವು. ತಳದಲ್ಲಿ P ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. OP ದೂರ r ಆಗಿದ್ದು, Ox ನಿಂದ ಅಪಸವ್ಯವಾಗಿ ಅಳೆದು ಬಂದ xOP ಕೋನವು θ ಆದರೆ, (r, θ) ಎಂಬುವು P ಯ **ಧ್ರುವನಿರ್ದೇಶಕಗಳು.** r, θ ಗಳ ಬೆಲೆ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, P ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು, ಇಂಥ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಥಾನ ಸಿಗುತ್ತದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದರೆ P ದತ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ, r, θ ಗಳ ಬೆಲೆ ಗಳನ್ನು ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, $(r, \theta+2n\pi)$ ಮತ್ತು $[-r, \theta+(2m+1)\pi]$, ಇಲ್ಲಿ n, m ಯಾವುದೇ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಳು, ಈ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೂ ಅದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.



There is thus a fundamental difference between the Cartesian system of coordinates and the polar system. In the Cartesian system (rectangular or oblique), a point has its coordinates uniquely determined, which is not so in the polar system. Nevertheless while considering geometrical loci determined by equations between the coordinates, this difficulty will disappear. Just as an equation $f(x, y) = 0$ in Cartesian coordinates defines a curve. so also the equation of a curve in polar coordinates is expressible in the form $f(r, \theta)=0$, or $r=\phi(\theta)$. Consider as an example the curve defined by the equation $r=2+3 \cos \theta$. The values $r = -1$, $\theta = \pi$ satisfy this equation, so that $(-1, \pi)$ are the coordinates of a point on the curve. The same point has also for its polar coordinates $(1, 0)$ or $(1, 2n\pi)$, where n is an integer. These coordinates do *not* satisfy the given equation.

Polar coordinates may thus give rise to some inherent difficulties. Nevertheless, they are found to be of great use in the solution of certain problems. We briefly deal in this chapter the straight line, the circle and the conic.

2.2 Conversion formulae. In the figure defining polar coordinates let us choose the pole O as the origin of a Cartesian rectangular system and θ the initial line Ox as the x-axis of the rectangular system. The y-axis is the line through O perpendicular to Ox. The Cartesian coordinates x, y of the point P are then

$$x=r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Conversely $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ where we choose $-\pi \leq \theta \leq \pi$, to avoid ambiguity of values. These conversion formulae from polar to Cartesian, or from Cartesian to polar, will be very useful.

ಹೀಗೆ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕ್ರಮಕ್ಕೂ ಧ್ರುವ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕ್ರಮಕ್ಕೂ ಅತಿಮುಖ್ಯವಾದ ಒಂದು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ (ಲಂಬ ಅಥವಾ ಓರೆ), ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧೃತವಾಗುತ್ತವೆ. ಧ್ರುವನಿರ್ದೇಶಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹೀಗಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸೂಚಿಸತಕ್ಕ ಬಿಂದುಪಥಗಳನ್ನು ವಿಮರ್ಶಿಸುವಾಗ, ಈ ತೊಂದರೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತು $f(x, y) = 0$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು (ವಕ್ರ) ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಡುವಂತೆ, ಧ್ರುವ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $f(r, \theta)=0$ ಅಥವಾ $r=\phi(\theta)$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $r=2+3\cos\theta$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ತಿಳಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. $r=-1$, $\theta=\Pi$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $(-1, \Pi)$ ಎಂಬುವು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. ಇದೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ $(1, 0)$ ಮತ್ತು $(1, 2n\Pi)$, n ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇವೂ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. ಆದರೆ ಈ ನಿರ್ದೇಶಕ ಗಳು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಧ್ರುವ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಂದ ಹೀಗೆ ಒಂದೊಂದುವೇಳೆ ತೊಂದರೆಗಳುಂಟಾಗಲು ಸಾಧ್ಯ. ಹೀಗಿದ್ದರೂ, ಕೆಲವುತರದ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಗೆ ಇವು ಬಹಳ ಸಹಕಾರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆ, ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಶಂಕುಜಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿ ಸುವೆವು.

೨.೨ ಪರಿವರ್ತಕ ಉಕ್ತಿಗಳು. ಧ್ರುವ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವ ಮೇಲಣ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕ್ರಮವನ್ನು O ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿಯೂ, Ox ನ್ನು x ಅಕ್ಷವನ್ನಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವ. O ಮೂಲಕ Ox ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯೇ y ಅಕ್ಷ. P ಬಿಂದುವಿನ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ ಬೆಲೆಗಳ ಏಕೈಕತೆಗಾಗಿ, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಧ್ರುವ ಕ್ರಮದಿಂದ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಕ್ರಮಕ್ಕೂ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಕ್ರಮದಿಂದ ಧ್ರುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೂ ಈ ಉಕ್ತಿಗಳು ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ. ಇವು ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ.

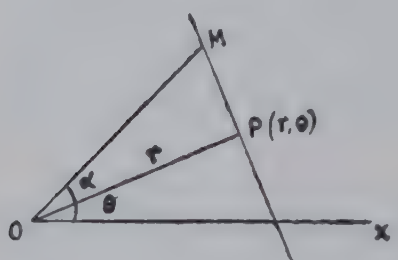
2.3 The straight line. The equation of a straight line in Cartesian coordinates is $ax+by+c=0$. Using the above conversion formulae, we obtain

$$r\,(a\cos\theta + b\sin\theta) + c = 0$$

We write this in the form

$$\frac{l}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta \qquad \cdots \quad (2.1)$$

We can also determine a relation between r and θ by a simple geometrical consideration.



Let OM be perpendicular from O on the line. Let (p, α) be the polar coordinates of M. Let P (r, θ) be any point on the line. The relation

$$\text{OM} = \text{OP}\cos\text{POM}$$

gives

$$p = r\cos(\theta-\alpha) \qquad \cdots \quad (2.2)$$

which is then an alternative form of equation of the straight line. (2.2) is readily converted to the form (2.1) by expansion.

For a line passing through the pole, $p=0$, and $\theta=$ a constant. Conversely the equation $\theta=k$ defines a line through the pole.

2.4 The circle. When the centre of the circle is chosen as the pole the equation of the circle is obviously

$$r = a$$

where a is the radius. This converted into Cartesians gives the familiar form $x^2+y^2=a^2$.

Let us next choose the pole on the circumference and the initial line as the diameter through the pole.

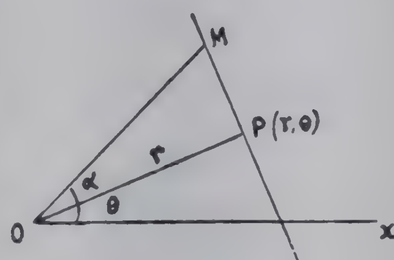
೨.೩ ಸರಳರೇಖೆ. ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $ax+by+c=0$, ಮೇಲಣ ಪರಿವರ್ತಕೋಕ್ತಿಗಳಿಂದ, ಇದು

$$r\ (a\cos\theta + b\sin\theta) + c=0$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು $$\frac{l}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta \qquad \ldots \quad (೨.೧)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವೆವು. ಕೇವಲ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬೇರೊಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

O ಇಂದ ರೇಖೆಗೆ OM ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. Mನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (p, α) ಆಗಿರಲಿ. ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $P(r, \theta)$ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. OM=OP cos POM ಎಂಬ ಸಂಬಂಧದಿಂದ



$$p=r\ (\cos\theta-\alpha) \qquad \ldots \quad (೨.೨)$$

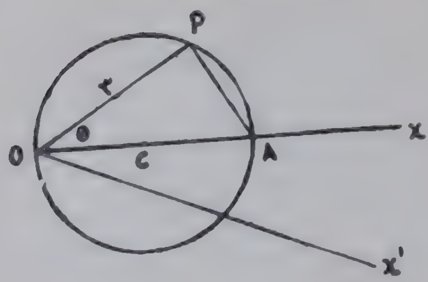
ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಬೇರೊಂದು ರೂಪ. (೨.೨)ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ (೨.೧)ರ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಧ್ರುವದ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಗೆ $p=0$ ಆದ್ದರಿಂದ $\theta=$ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ $\theta=k$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ಧ್ರುವದ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

೨.೪ ವೃತ್ತ

ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಧ್ರುವವಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ $r=a$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಇಲ್ಲಿ $a=$ ತ್ರಿಜ್ಯ. ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್‌ಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ, $x^2+y^2=a^2$ ಎಂಬ ಪರಿಚಿತ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಧ್ರುವ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರಲಿ, ಆದರ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಮೂಲರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸುವ.



If P (r, θ) is any point on the circle, and if OA the diameter through O=2a, the angle OPA is a right angle. Hence

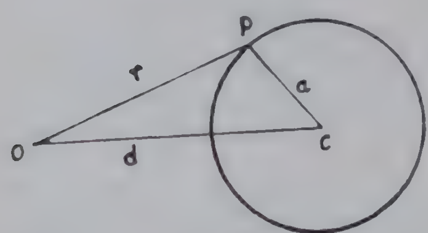
$$r = 2a \cos \theta \qquad \ldots \quad (2.3)$$

If the initial line is some line Ox' which is such that $x'\hat{O}A = \alpha$, the equation of the circle is

$$r = 2a \cos (\theta - \alpha)$$

for now $\theta = x'\hat{O}P$, and $A\hat{O}P = \theta - \alpha$.

The general equation of the circle.



Let the pole be any point O in the plane of the circle but let the initial line be the diameter through O. If P (r, θ) be any point on the circle, we have from the $\triangle$OPC,

$$a^2 = r^2 + d^2 - 2\ dr \cos \theta$$

where a is the radius, and d the distance of the centre C from O.

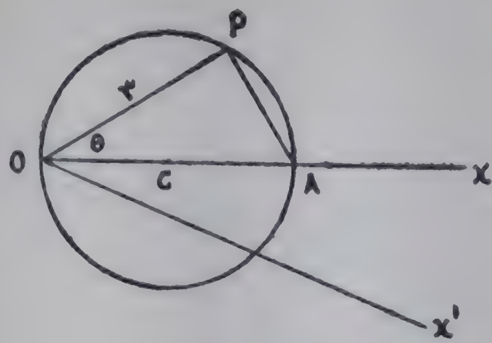
This is then the general equation of the circle. If however the initial line is chosen so that OC makes with it an angle α, the equation is easily seen to be

$$a^2 = r^2 + d^2 - 2\ dr \cos (\theta - \alpha)$$

2.5 The conic. Polar coordinates are mostly used to study the conic referred to one of its foci as the pole.

We shall use the familiar notations: S a focus, A the corresponding vertex, X the foot of the corresponding directrix, e the eccentricity, and l the semi-latus-rectum. Let P be any point on the conic and PM the perpendicular from P on the directrix corresponding to S. Let PN be the ordinate through P.

ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ $P(r, \theta)$ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿ, O ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸ $OA=2a$ ಆದರೆ, OPA ಕೋನ ಲಂಬಕೋನ. ಆದ್ದರಿಂದ



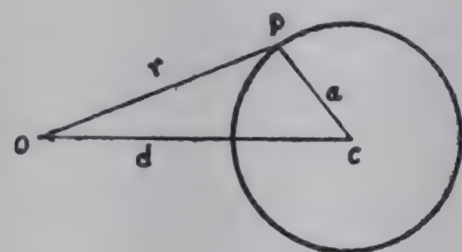
$r=2a \cos \theta$ ... (೨.೩)

ಮೂಲರೇಖೆ ಇನ್ನಾವುದಾದರೂ ಬೇರೆ ರೇಖೆ Ox' ಆಗಿ, $x'\hat{O}A=\alpha$ ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ

$r=2a \cos(\theta-\alpha)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಈಗ $\theta=x'\hat{O}P$, $A\hat{O}P=\theta-\alpha$.

ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ.

ಧ್ರುವವು ವೃತ್ತದ ತಳದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು O ಆಗಿರಲಿ, ಮೂಲ ರೇಖೆ ಮಾತ್ರ O ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರಲಿ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ $P(r, \theta)$ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ವಾದರೆ $\triangle OPC$ ಇಂದ



$$a^2=r^2+d^2-2dr\cos\theta$$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧ ಬರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a=$ ತ್ರಿಜ್ಯ, $d=$ CO ದೂರ.

ವೃತ್ತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಿದು. ಮೂಲರೇಖೆ OC ಯೊಡನೆ α ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವಂತೆ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಸಮೀಕರಣ

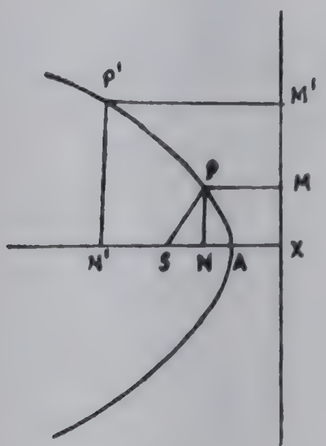
$$a^2=r^2+d^2-2dr\cos(\theta-\alpha)$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

೨.೫ ಶಂಕುಜ

ಶಂಕುಜದ ಒಂದು ನಾಭಿಯನ್ನು ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಶಂಕುಜವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಧ್ರುವನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ಪರಿಚಿತಸಂಕೇತಗಳಿವು : S ಒಂದು ನಾಭಿ, A ಅದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಶೃಂಗ, X ಆ ನಾಭಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಚಾಲಕರೇಖೆಯ ಬುಡ, e ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ, l ಅರ್ಧನಾಭೀ ಲಂಬ. ಶಂಕುಜದ ಮೇಲೆ P ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು, P ಇಂದ Sಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಚಾಲಕ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ PM ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. Pಯ ಭುಜ PN ಆಗಿರಲಿ.

We shall choose S as the pole and SA as the initial line. If P be any point on the conic $SP=r$, and $ASP=\theta$.



We have from the focus-directrix property of the conic,

$$
\begin{aligned}
r = SP &= e.PM \\
&= e.NX \\
&= e(SX-SN) \\
&= l-e.r\cos\theta
\end{aligned}
$$

Since if L is one end of the latus-rectum, $l=e.SX$. If P is taken at any point P′ such that N′ and A are on opposite sides of S we have

$$
\begin{aligned}
r = SP' &= e.P'M' \\
&= e.N'X \\
&= e.(N'S+SX) \\
&= e.r\cos(\pi-\theta)+l \\
&= l-er\cos\theta, \text{ as before.}
\end{aligned}
$$

Hence, $r(1+e\cos\theta)=l$

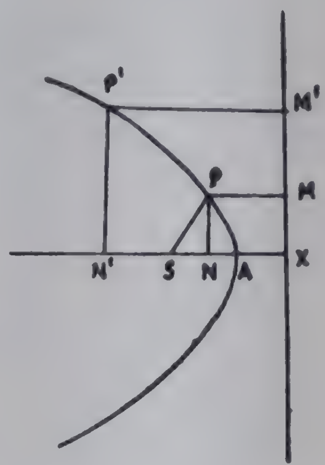
or $$\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta \qquad \cdots \quad (2.1)$$

This is the polar equation of the conic referred to S as pole, and SA as the initial line. If however the conic is a hyperbola, this equation holds only for points on the *near* branch, the branch which includes S as an interior point. The equation will be different for points on the other branch, as will be shown below.

S ನ್ನು ಧ್ರುವವಾಗಿಯೂ, SA ನ್ನು ಮೂಲರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ ಆರಿಸುವೆವು. ಶಂಕುಜದ ಮೇಲೆ P ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೆ. $SP = r$, $A\hat{S}P = \theta$.

ಶಂಕುಜದ ನಾಭೀ-ಚಾಲಕ ಸಂಬಂಧದಿಂದ

$$r = SP = e.PM$$
$$= e.NX$$
$$= e\,(SX - SN)$$
$$= l - e.r\cos\theta$$



ಏಕೆಂದರೆ. ನಾಭೀಲಂಬದ ಒಂದು ತುದಿ L ಆದರೆ, $l = e.SX$.

Pಗೆ ಬದಲು, N′ ಮತ್ತು A ಬಿಂದುಗಳು Sನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆ P′ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ

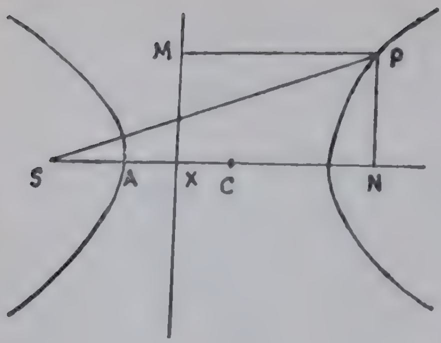
$$r = SP' = e.P'M'$$
$$= eN'X$$
$$= e.(N'S + SX)$$
$$= e.r\cos(\pi - \theta) + l$$
$$= l - er\cos\theta, \text{ ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$r(1 + e\cos\theta) = l$$

ಅಥವಾ $$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \qquad \dots \quad (೨.೧)$$

S ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿ SA ಮೂಲರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಶಂಕುಜದ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣವಿದು. ಶಂಕುಜ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೀಪದ ಶಾಖೆಗೆ ಎಂದರೆ Sನ್ನು ಒಳಬಿಂದುವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಶಾಖೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಆಚಿನ ಶಾಖೆ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮೀಕರಣ ಬೇರೆಯಾಗುತ್ತದೆ,



We now have

$$r = SP = e.MP$$
$$= e.XN$$
$$= e.(SN - SX)$$
$$= e.r \cos\theta - l$$

$$\therefore \quad \frac{l}{r} = e\cos\theta - 1$$

This is the equation of the outer branch of the hyperbola.

[*Note:* The equation $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ could be used for the outer branch also, if the coordinates of P in the above figure be taken as $(-r, \theta + \pi)$, instead of as (r, θ). For, using these coordinates, this equation reduces to $\frac{l}{r} = e\cos\theta - 1$. Some writers use the same equation for both branches of the hyperbola, with this understanding that r for the outer branch is negative and θ becomes $\theta + \pi$. We have preferred to consider the two branches of the hyperbola, as different curves, with different polar equations.]

2.6 Equation of chord. Let P and Q be two points on the conic. If it is a hyperbola, we consider P and Q on the *nearer* branch. Let $\alpha - \beta$ and $\alpha + \beta$ be the vectorial angles, i.e., the values of θ for the points P and Q respectively.

The general equation of a line is

$$\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta.$$

If this is the equation of the chord PQ, the coordinates of P and Q must satisfy this equation. When $\theta = \alpha - \beta$, the value of $\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\alpha - \beta)$, from the equation of the conic. When $\theta = \alpha + \beta$, the value of $\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\alpha + \beta)$.

ಈಗ $r = SP = e.MP$

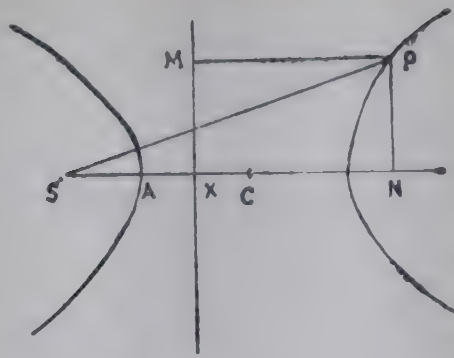
$= e.XN$

$= e.(SN - SX)$

$= e.r \cos \theta - l$

$\therefore \quad \dfrac{l}{r} \quad = e.\cos \theta - 1$

ಹೈಪರ್‌ಬೊಲದ ಆಚಿನ ಶಾಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಿದು.



[ಷರಾ: ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು (r, θ)ಗೆ ಬದಲು $(-r, \theta + \pi)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಆಚಿನ ಶಾಖೆಗೂ $\dfrac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ $\dfrac{l}{r} = e\cos \theta - 1$ ಎಂದೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ಗ್ರಂಥಕರ್ತರು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಚಿನ ಶಾಖೆಗೆ r ಋಣವೆಂದೂ θಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ $\theta + \pi$ ಎಂದೂ ಭಾವಿಸಿ ಎರಡೂ ಶಾಖೆಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಹೈಪರ್‌ಬೊಲದ ಎರಡು ಶಾಖೆಗಳೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳೆಂದೂ ಅವುಗಳ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ಉತ್ತಮವೆಂದು ನಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯ].

೨.೬ ಜ್ಯಾರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

ಶಂಕುಜದ ಮೇಲೆ P, Q ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಹೈಪರ್‌ಬೊಲವಾದಲ್ಲಿ P,Q ಎರಡನ್ನೂ ಸಮೀಪ ಶಾಖೆಯ ಮೇಲೆಯೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. P,Q ಗಳ ಸದಿಶ ಕೋನಗಳು, ಎಂದರೆ θ ದ ಬೆಲೆಗಳು $\alpha - \beta$ ಮತ್ತು $\alpha + \beta$ ಆಗಿರಲಿ. ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$$

ಜ್ಯಾ PQ ವಿನ ಸಮೀಕರಣ ಇದಾದರೆ, P, Q ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದಬೇಕು. $\theta = \alpha - \beta$ ಆದಾಗ, ಶಂಕುಜದ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ, $\dfrac{l}{r}$ನ ಬೆಲೆ $1 + e \cos (\alpha - \beta)$ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ $\theta = \alpha + \beta$ ಆದಾಗ, ಅದರ ಬೆಲೆ $1 + e \cos (\alpha + \beta)$.

$$\therefore \quad A\cos(\alpha-\beta)+B\sin(\alpha-\beta) = 1+e\cos(\alpha-\beta)$$

$$A\cos(\alpha+\beta)+B\sin(\alpha+\beta) = 1+e\cos(\alpha+\beta)$$

Solving,

$$A\sin 2\beta = \{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}+e\sin 2\beta$$

$$\therefore \quad A = e\cos\alpha\sec\beta$$

$$-B\sin 2\beta = \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$

$$\therefore \quad B = \sin\alpha\sec\beta$$

The equation of the chord joining the points $\alpha-\beta$ and $\alpha+\beta$ is therefore

$$\frac{l}{r} = (e+\cos\alpha\sec\beta)\cos\theta+\sin\alpha\sec\beta\sin\theta$$

or $$\frac{l}{r} = e\cos\theta+\sec\beta\cos(\theta-\alpha) \qquad \cdots \quad (2.2)$$

We deduce the equation of the tangent at the point whose vectorial angle is α, by making $\beta\to 0$. Hence the equation of the tangent at the point 'α' is

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)$$

[If the points are both on the farther branch of the hyperbola, the equation of the chord is found to be

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta-\sec\beta\cos(\theta-\alpha)$$

The equation of the tangent at 'α' is therefore

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta-\cos(\theta-\alpha)]$$

2.7 The normal. The equation of any line perpendicular to

$$\frac{l}{r} = A\cos\theta+B\sin\theta$$

$$\therefore \quad A\cos(\alpha-\beta)+B\sin(\alpha-\beta)=1+e\cos(\alpha-\beta)$$

$$A\cos(\alpha+\beta)+B\sin(\alpha+\beta)=1+e\cos(\alpha+\beta)$$

ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$A\sin 2\beta=\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}+e\sin 2\beta$$

$$\therefore \quad A=e+\cos\alpha\sec\beta$$

$$-B\sin 2\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$

$$\therefore \quad B=\sin\alpha\sec\beta$$

$\therefore$ $\alpha-\beta$, $\alpha+\beta$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಜ್ಯಾರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{l}{r}=(e+\cos\alpha\sec\beta)\cos\theta+\sin\alpha\sec\beta\sin\theta$$

ಎಂದರೆ, $$\frac{l}{r}=e\cos\theta+\sec\beta\cos(\theta-\alpha) \qquad \ldots \quad (೨.೨)$$

ಇದರಲ್ಲಿ, $\beta\to 0$ ಎಂದು ಮಾಡಿದರೆ, ಸದಿಶಕೋನ α ಉಳ್ಳ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ

α ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)$$

[ಬಿಂದುಗಳು ಎರಡೂ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲದ ಆಚೆಯ ಶಾಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಜ್ಯಾರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{l}{r}=e\cos\theta-\sec\beta\cos(\theta-\alpha)$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ α ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{l}{r}=e\cos\theta-\cos(\theta-\alpha)]$$

೨.೭ ಲಂಬ

$\frac{l}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta$ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

is given by $\frac{l'}{r} = -A \sin \theta + B \cos \theta$

This is easily seen, because the corresponding rectangular Cartesian equations are $Ax+By=l$ and $Bx-Ay=l'$. This may also be deduced from equation (2.2). The equation of a perpendicular line is thus obtained by changing θ to $\frac{\pi}{2}+\theta$, and changing l to l'.

The equation of the normal to the conic $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ at the point α is thus of the form

$$\frac{l'}{r} = -e\sin\theta - \sin(\theta-\alpha)$$

The value of l' is obtained by choosing it so that this line passes through P whose vectorial angle is α. The value of r at P is $l/(1+e\cos\alpha)$

$$\therefore \quad \frac{l'}{l}(1+e\cos\alpha) = -e\sin\alpha$$

The equation of the normal at α is thus given by

$$\frac{e\sin\alpha}{1+e\cos\alpha}\cdot\frac{l}{r} = e\sin\theta + \sin(\theta-\alpha) \quad \ldots(2.3)$$

2.8 Examples: 1 Find the equation of the directrix corresponding to the pole S.

If Q (r, θ) is any point on the directrix $r\cos\theta = SX = \frac{l}{e}$, which is therefore the equation required.

2 Obtain the equations of the asymptotes of the conic $\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$.

The asymptotes are tangents at the points infinitely distant. At the point of vectorial angle α, $r=\infty$ if $1+e\cos\alpha=0$, *i.e.*, if $\cos\alpha = -\frac{1}{e}$.

$$\frac{l'}{r} = -A\sin\theta + B\cos\theta$$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ

ಏಕೆಂದರೆ, ಇವುಗಳ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಲಂಬಾಕ್ಷ ಸಮೀಕರಣಗಳು $Ax + By = l$, $Bx - Ay = l'$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು, θ ವನ್ನು $\frac{\pi}{2} + \theta$ ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ, l ಗೆ ಬದಲು l' ಬರೆಯುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ ಎಂಬ ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ α ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{l'}{r} = -e\sin\theta - \sin(\theta - \alpha)$$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ರೇಖೆ P ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ, l' ನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. P ಬಿಂದುವಿನ ಸದಿಶಕೋನ α, ಅಲ್ಲಿ r ನ ಬೆಲೆ $l/(1+e\cos\alpha)$

$$\therefore \quad \frac{l'}{l}(1 + e\cos\alpha) = -e\sin\alpha$$

ಆದ್ದರಿಂದ, α ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{e\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha} \cdot \frac{l}{r} = e\sin\theta + \sin(\theta - \alpha) \qquad \ldots \quad (೨.೩)$$

೨.೮ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಧ್ರುವ S ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ Q (r, θ) ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೆ,

$r\cos\theta = SX = \frac{l}{e}$. ಇದೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ.

2 $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ ಶಂಕುಜದ ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಅನಂತ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು. ಸದಿಶ α ಬೆಲೆಗೆ, $r = \infty$ ಆಗಲು, $1+e\cos\alpha = 0$ ಆಗಬೇಕು. ಎಂದರೆ $\cos\alpha = -1/e$. α ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

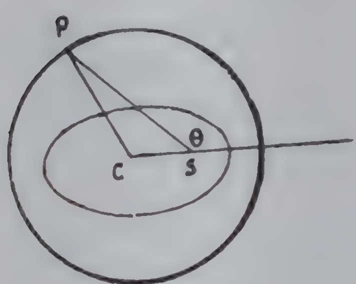
The equation of the tangent at α is

$$\frac{l}{r} = e \cos \theta + (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha)$$

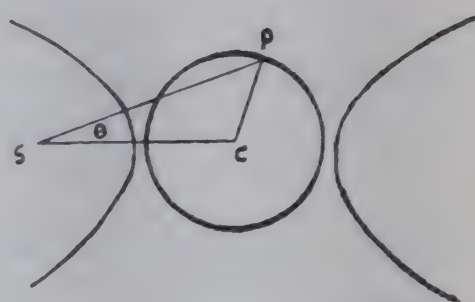
substituting for $\cos \alpha$ and $\sin \alpha$ the equations of the asymptotes are

$$\frac{l}{r} = \left(e - \frac{1}{e}\right) \cos \theta \pm \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} \sin \theta$$

3 Obtain the equation of the director circle. The $(\text{radius})^2$ of the director circle is $a^2 + b^2$ for the ellipse, and $a^2 - b^2$ for the hyperbola.



(i)



(ii)

$CP^2 = SP^2 + CS^2 - 2\,CS \cdot SP \cos C\hat{S}P$ in either figure

$\therefore$ In fig. (i) $a^2 + b^2 = r^2 + a^2e^2 - 2ae.r. \cos(\pi - \theta)$.

Using $b^2 = a^2(1 - e^2)$ and $b^2 = al$, this can be expressed in terms of e and l in the form

$$r^2(1 - e^2) + 2elr \cos \theta - 2l^2 = 0$$

In fig. (ii) $a^2 - b^2 = r^2 + a^2e^2 - 2aer \cos \theta$

Now $b^2 = al = a^2(e^2 - 1)$. On simplification, we obtain the same equation.

4 The semi-latus-rectum is a harmonic mean between the segments of a focal chord.

Let PSQ be a focal chord. Taking the conic as an ellipse, a parabola, or the near branch of a hyperbola, if α is the vectorial angle of P, the vectorial angle of Q is $\pi + \alpha$.

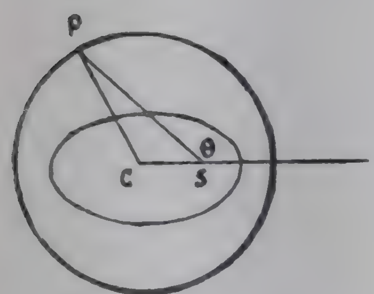
$$\frac{l}{r} = e \cos\theta + (\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)$$

cos α, sin αಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬರೆದರೆ, ಅನಂತಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

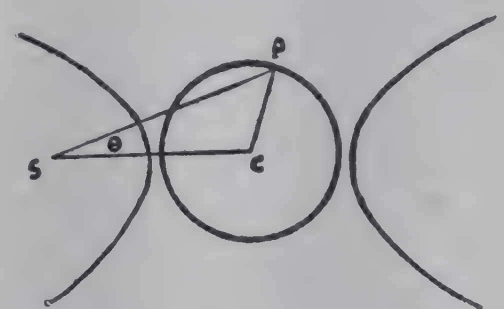
$$\frac{l}{r} = \left(e - \frac{1}{e}\right)\cos\theta \pm \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\sin\theta$$

3 ಚಾಲಕ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಚಾಲಕ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ $a^2 + b^2$, ಹೈಪರ್ ಬೊಲಕ್ಕೆ $a^2 - b^2$.



(i)



(ii)

ಎರಡೂ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ

$$CP^2 = SP^2 + CS^2 - 2CS.SP\cos C\hat{S}P$$

$\therefore$ ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ $a^2+b^2=r^2+a^2e^2-2\,ae\cdot r\cdot\cos(\pi-\theta)$

$b^2=a^2(1-e^2)$, $b^2=al$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದನ್ನು e, l ಮಾತ್ರ ಕೂಡಿರುವಂತೆ

$$r^2(1-e^2)+2elr\cos\theta-2l^2=0$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ, $a^2-b^2=r^2+a^2e^2-2aer\cos\theta$. ಈಗ $b^2=al=a^2(e^2-1)$. ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದ ಮೇಲೆ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವೇ ಬರುತ್ತದೆ.

4 ಯಾವುದೇ ನಾಭಿಜ್ಯಾದ ಖಂಡಗಳ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕ ಅರ್ಧನಾಭೀ ಲಂಬವಾಗುತ್ತದೆ.

PSQ ಯಾವುದೇ ನಾಭಿ ಜ್ಯಾ ಆಗಿರಲಿ, ಶಂಕುಜ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವಾಗಲಿ, ಪ್ಯಾರಾಬೊಲವಾಗಲಿ, ಹೈಪರ್‌ಬೊಲದ ಸಮೀಪ ಶಾಖೆಯಾಗಲಿ, ಆಗಿರಬಹುದು. Pಯ ಸದಿಶಕೋನ α ಆದರೆ, Qನ ಸದಿಶಕೋನ $\pi+\alpha$.

$$\therefore \quad \frac{l}{SP} = 1 + e\cos\alpha$$

$$\frac{l}{SQ} = 1 + e\cos(\pi+\alpha) = 1 - e\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{l}{SP} + \frac{l}{SQ} = 2, \text{ i.e., } \frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{2}{l}$$

$\therefore$ l is the harmonic mean between SP and SQ.

[If P and Q are on different branches of a hyperbola, they have the same vectorial angle α. But $\frac{l}{SQ} = e\cos\alpha - 1$.

$$\therefore \quad \frac{l}{SP} - \frac{l}{SQ} = 2]$$

Exercises 2.1

1. Obtain the equation of the other directrix.

2. When $e < 1$, write down (i) the equation of the minor axis (ii) the coordinates of the ends of the minor axis.

3. Find the condition that the line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ may be a tangent to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

4. Prove that the tangents at the extremities of a focal chord of a conic* intersect on the directrix.

Prove also that these tangents are at right angles if the conic is a parabola.

5. PSP′ and QSQ′ are two perpendicular focal chords of a conic. Prove that (i) $\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'} = \text{constant}$

(ii) $\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} = \text{constant.}$

---

* In this and in the succeeding problems, it will be understood that when the conic is a hyperbola, we consider its nearer branch only.

$$\therefore \quad \frac{l}{SP} = 1 + e\cos\alpha$$

$$\frac{l}{SQ} = 1 + e\cos(\pi + \alpha) = 1 - e\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{l}{SP} + \frac{l}{SQ} = 2 \text{ ಅಥವಾ } \frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{2}{l}$$

$\therefore$ SP, SQಗಳ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕ l.

[P, Q ಬಿಂದುಗಳು ಹೈಪರ್‌ಬೊಲದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಶಾಖೆಗಳ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಸದಿಶಕೋನಗಳು ಎರಡೂ α ಆಗುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ, $\frac{l}{SQ} = e\cos\alpha - 1 \quad \therefore \quad \frac{l}{SP} - \frac{l}{SQ} = 2$]

ಅಭ್ಯಾಸ ೨.೧

1. ಇನ್ನೊಂದು ಚಾಲಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

2. $e < 1$ ಆದಾಗ, (i) ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (ii) ಹ್ರಸ್ವಾಕ್ಷದ ತುದಿಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

3. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ ಶಂಕುಜಕ್ಕೆ $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಲು ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

4. ಶಂಕುಜದ*ನಾಭೀಜ್ಯಾವೊಂದರ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಚಾಲಕದ ಮೇಲೆ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಶಂಕುಜ ಪ್ಯರಾಬೊಲವಾದರೆ, ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. PSP′, QSQ′ ಎಂಬುವು ಒಂದು ಶಂಕುಜದ ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ನಾಭಿ ಜ್ಯಾಗಳು.

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{ಸ್ಥಿರ}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} = \text{ಸ್ಥಿರ}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

---

* ಇಲ್ಲಿಯೂ ಮುಂದೂ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಶಂಕುಜ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲವಾದರೆ, ಅದರ ಸಮೀಪಶಾಖೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕುರಿತು ಹೇಳುವೆವು.

6. The tangents to the parabola $\frac{l}{r}=1+\cos\theta$ at the points P and Q whose vectorial angles are α and β meet at T. Prove that $ST=\dfrac{l}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$, and that $ST^2=SP.SQ$.

7. Prove that the equation of the auxiliary circle (the circle on the major axis as diameter) of the ellipse $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ is $r^2(1-e^2)+2elr\cos\theta-l^2=0$.

Prove that for the hyperbola with the same equation, this is the equation of the circle on the transverse axis as diameter.

8. The eccentric angle of any point P on an ellipse is α. The angle ASP$=\theta$. Prove that $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\alpha}{2}$.

9. A circle passes through a focus of a conic. Show that the sum of the reciprocals of the focal distances of the four points in which the circle cuts the conic is $2/l$.

[The equation of the circle is of the form $r=2A\cos(\theta-\alpha)$ (§ 2.4). Eliminate θ between $r-2A\cos\alpha\cos\theta=2A\sin\alpha\sin\theta$ and $l/r=1+e\cos\theta$. We obtain a fourth degree equation in r. Write down the sum of the reciprocals of the roots.]

10. A circle of given radius passing through the focus S of a conic cuts it in P, Q, R, U. Prove that SP.SQ.SR.SU is constant (use the equation obtained in Ex. 9).

11. A chord of a conic subtends a constant angle at a focus. Show that the chord touches a fixed conic.

6 $\dfrac{l}{r} = 1 + \cos\,\theta$ ಪ್ಯರಾಬೊಲಕ್ಕೆ ಸದಿಶಕೋನಗಳು α, β ಆಗಿ ಉಳ್ಳ P, Q ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು Tಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. $ST = \dfrac{l}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}$, ಮತ್ತು $ST^2 = SP \cdot SQ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7 ದೀರ್ಘವೃತ್ತ $\dfrac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ಗೆ ಉಪವೃತ್ತ (ದೀರ್ಘಾಕ್ಷವನ್ನು ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತ)ದ ಸಮೀಕರಣ $r^2(1-e^2)+2elr\,\cos\,\theta - l^2 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮೇಲಣ ಸಮೀಕರಣವುಳ್ಳ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಕ್ಕೆ, ಇದು ಅದರ ಅನುಪ್ರಸ್ಥ ಅಕ್ಷವನ್ನು ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8 ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು Pಯ ಉತ್ಕೇಂದ್ರ ಕೋನ α ಮತ್ತು ASP ಕೋನ θ. $\tan\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\,\tan\dfrac{\alpha}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9 ಶಂಕುಜದ ನಾಭಿಯೊಂದರ ಮೂಲಕ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ನಾಭೀದೂರಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತ $2/l$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. [ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪ $r = 2A\cos(\theta - \alpha)$. (§ ೨.೪). $r - 2A\cos\alpha\cos\theta = 2A\sin\alpha\sin\theta$ ಮತ್ತು $l/r = 1 + e\,\cos\theta$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಡುವೆ θವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸುವುದರಿಂದ, rನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕುವುದು. ಇದರ ಮೂಲಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ].

10 ದತ್ತತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಒಂದು ಶಂಕುಜದ ನಾಭಿ S ಮೂಲಕ ಹಾದು ಅದನ್ನು P, Q, R, U ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. SP.SQ.SR.SU ಸ್ಥಿರವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(ಉದಾ. 9ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ).

11 ಶಂಕುಜದ ಜ್ಯಾ ನಾಭಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾ ಬೇರೊಂದು ಸ್ಥಿರ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[If $\alpha-\beta$ and $\alpha+\beta$ are the vectorial angles of P and Q, PSQ $=2\beta=$ constant. The equation of PQ is

$$\frac{l\cos\beta}{r}=(e\cos\beta)\cos\theta+\cos(\theta-\alpha).$$ This evidently touches the conic $\dfrac{l\cos\beta}{r}=1+(e\cos\beta)\cos\theta$].

12. A chord of a conic subtends a constant angle at a focus S. Prove that the locus of the pole of the chord is a conic having S for a focus and having the directrix corresponding to S in common with the given conic.

[The tangents at $\alpha-\gamma$ and $\alpha+\beta$ meet at $\theta=\alpha$, $\dfrac{l}{r}=e\cos\alpha+\cos\beta$. The locus required is then the conic $\dfrac{l}{r}=e\cos\theta+\cos\beta$ or $\dfrac{l\sec\beta}{r}=1+(e\sec\beta)\cos\theta.$]

13. If PQR is the triangle formed by three tangents to the parabola $\dfrac{l}{r}=1+\cos\theta$ the equation of the circumcircle of $\triangle$ PQR is

$$2r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=l\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$$

where α, β, γ are the vectorial angles of the points of contact of the tangents. Deduce that *the circumcircle of the triangle formed by three tangents to a parabola passes through the focus.*

[The tangents at 'α' and 'β' intersect at

$$\left(\frac{l}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}},\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$\equiv$ R, say. Let us find a circle through the pole so as to pass through R. If $r=2A\cos(\theta-\lambda)$ passes through R,

$$\frac{l}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=2A\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\lambda\right).$$ Symmetrical

[P, Q ಬಿಂದುಗಳ ಸದಿಶಕೋನಗಳು $\alpha-\beta$, $\alpha+\beta$ ಆದರೆ $PSQ=2\beta$ $=$ ಸ್ಥಿರ. PQನ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{l\cos\beta}{r}=(e\cos\beta)\cos\theta+\cos(\theta-\alpha).$$ ಇದು

$$\frac{l\cos\beta}{r}=1+(e\cos\beta)\cos\theta$$ ಎಂಬ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.]

12. ಶಂಕುಜದ ಜ್ಯಾವೊಂದು ನಾಭಿ Sನಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದ ಧ್ರುವದ ಪಥ S ನಾಭಿಯಾಗಿಯೂ ದತ್ತಶಂಕುಜಕ್ಕೆ S ನಾಭಿಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವ ಚಾಲಕವನ್ನೇ ಚಾಲಕವಾಗಿಯೂ ಉಳ್ಳ ಮತ್ತೊಂದು ಶಂಕುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

[$\alpha-\beta$, $\alpha+\beta$ಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $\theta=\alpha$, $\frac{l}{r}=e\cos\alpha+\cos\beta$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಪಥ $\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos\beta$, ಅಥವಾ $\frac{l}{r}\sec\beta=1+(e\sec\beta)\cos\theta$ ಎಂಬ ಶಂಕುಜ.]

13. $\frac{l}{r}=1+\cos\theta$ ಪ್ಯರಾಬೊಲಕ್ಕೆ ಮೂರು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಂದ PQR ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ.

$$2r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=l\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ α,β,γಗಳು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳ ಸದಿಶಕೋನಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ, **ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಮೂರು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಂದಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತ ನಾಭಿಯ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತದೆ.**

[α, βಗಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $\left(\dfrac{l}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}},\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು R ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಧ್ರುವದ ಮೂಲಕವೂ R ಮೂಲಕವೂ ಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. $r=2A\cos(\theta-\lambda)$ ವೃತ್ತ R ಮೂಲಕ ಹೋಗುವುದಾದರೆ,

$$\frac{l}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=2A\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\lambda\right).$$ Aಗೂ λಕ್ಕೂ ಸಮಾಂಗತೆ

values for A and λ are obtained by taking

$$\frac{l}{2A} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \text{ and } \lambda = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Hence the circle with these values of A and λ passes through P, Q, R and S.]

14. The diameter of the circumcircle of the triangle formed by the tangents at L, M, N on a parabola is $\sqrt{\dfrac{SP.\ SQ.\ SR}{SA}}$. If C is the centre of this circle, CS makes with the axis of the parabola an angle equal to $\frac{1}{2}$ (ASL + ASM + ASN). (Use Ex. 13).

15. If θ, θ' are the vectorial angles of any point on a conic referred to the two foci, the initial line in both cases being the axis *in the same sense,* prove that $\tan\frac{\theta}{2} : \tan\frac{\theta'}{2}$ is constant.

[The equation of the conic referred to the other focus is now $\frac{l}{r'} = 1 - e\cos\theta'$. Prove as in Ex. 8 that $\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\alpha}{2}$. Hence the result.].

16. Prove that the locus of the foot of the perpendicular from a focus on a tangent is a circle when the conic is a central conic and a straight line when the conic is a parabola.

17. If a focal chord of an ellipse makes an angle α with the major axis show that the angle between the tangents at the extremities of the chord is $\tan^{-1}\left(\dfrac{2e\sin\alpha}{1-e^2}\right)$.

18. The equation to a conic referred to the pole as focus passing through the three points (r_i, θ_i), $i = 1, 2, 3$ is

ಯುಳ್ಳ ಬೆಲೆಗಳು $\frac{l}{2A} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ ಮತ್ತು $\lambda = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಬರುತ್ತವೆ. A ಮತ್ತು λಗಳಿಗೆ ಈ ಬೆಲೆಗಳುಳ್ಳ ವೃತ್ತ P, Q, R, S ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತದೆ].

14. ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಮೇಲೆ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾದ L, M, N ಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಆಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ $\sqrt{\frac{SP \cdot SQ \cdot SR}{SA}}$. ಈ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ C ಆದರೆ, ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ಅಕ್ಷದೊಡನೆ CS ಮಾಡುವ ಕೋನ $\frac{1}{2}$ (ASL+ASM+ASN). (ಉದಾ. 13 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

15. ಶಂಕುಜದ ಎರಡೂ ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಶಂಕುಜದ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಸದಿಶ ಕೋನಗಳು θ, θ'; ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲ ರೇಖೆಯು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಶಂಕುಜದ ಅಕ್ಷ. $\tan\frac{\theta}{2} : \tan\frac{\theta'}{2}$ ಸ್ಥಿರವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(ಇನ್ನೊಂದು ನಾಭಿಯನ್ನು ಕುರಿತು ಶಂಕುಜದ ಸಮೀಕರಣ $\frac{l}{r'} = 1 - e \cos \theta'$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾ. 8 ರಂತೆಯೇ $\tan \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\alpha}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಫಲಿತಾಂಶ ಇದರಿಂದ ಒಡನೆಯೇ ಬರುತ್ತದೆ.)

16. ಶಂಕುಜ ಕೇಂದ್ರೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ನಾಭಿಯಿಂದ ಯಾವುದೇ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಬುಡದ ಪಥ ಒಂದು ವೃತ್ತ; ಶಂಕುಜ ಪ್ಯರಾಬೊಲ ಆಗಿದ್ದರೆ ಈ ಪಥ ಸರಳರೇಖೆ.

17. ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭೀಜ್ಯಾ ದೀರ್ಘಾಕ್ಷದೊಡನೆ α ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಜ್ಯಾದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನ $\tan^{-1}\left(\frac{2e \sin \alpha}{1-e^2}\right)$.

18. ನಾಭಿಯನ್ನು ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿ ಪಡೆದು (r_i, θ_i), $i=1, 2, 3$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಶಂಕುಜದ ಸಮೀಕರಣ

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} & \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \frac{1}{r_1} & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 1 \\ \frac{1}{r_2} & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 1 \\ \frac{1}{r_3} & \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

19. The equation of the circle passing through the focus of the parabola $2a = r(1 + \cos\theta)$, and touching at the point whose vectorial angle is α is given by

$$r\cos^3\frac{\alpha}{2} = a\cos\left(\theta - \frac{3\alpha}{2}\right)$$

Answers

1. $r\cos\theta = -a\left(e + \frac{1}{e}\right)$ for an ellipse

   $= a\left(e + \frac{1}{e}\right)$ for a hyperbola

2. (i) $r\cos\theta = -ae$ (ii) $(a, \pi - \cos^{-1} e)$ and $(a, \pi + \cos^{-1} e)$

3. $(A - e)^2 + B^2 = 1$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} & \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \frac{1}{r_1} & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 1 \\ \frac{1}{r_2} & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 1 \\ \frac{1}{r_3} & \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

19. $2a=r(1+\cos\theta)$ ಪ್ಯರಾಬೊಲದ ನಾಭಿಯ ಮೂಲಕ ಹೋಗಿ ಸದಿಶ ಕೋನ α ಉಳ್ಳ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸತಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ $r\cos^3\frac{\alpha}{2} = a\cos\left(\theta - \frac{3\alpha}{2}\right)$.

ಉತ್ತರಗಳು

1. $r\cos\theta = -a\left(e + \frac{1}{e}\right)$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ

$= a\left(e + \frac{1}{e}\right)$ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲಕ್ಕೆ

2. (i) $r\cos\theta = -ae$ (ii) $(a, \pi - \cos^{-1} e)$ ಮತ್ತು $(a, \pi + \cos^{-1} e)$

3. $(A - e)^2 + B^2 = 1$

CHAPTER 3

BASIC THREE-DIMENSIONAL NOTIONS

3.1 Every mathematical discipline has to start with a minimum number of undefinable intuitively understood terms, and a minimum number of truths called axioms or postulates, which are unprovable and considered as self-evident. The student is already familiar with the terms and axioms which are required at the commencement of his study of plane geometry. They are written below, for the sake of revision.

A set of points constitutes a geometrical figure. Space is the set of all points. A point is of zero dimension. A line is a set of points, satisfying the following postulates and is said to be of one dimension.

Postulate 1. Two distinct points can be joined by one and only one line. This line can be extended or produced indefinitely on both sides.

Postulate 2. A line contains an infinite number of points on it.

Postulate 3. We can set up a one-to-one correspondence between the points on a line and the real numbers.

Postulate 4. If three distinct points are considered on a line, one and only one of them lies between the other two.

Postulate 3 is equivalent to the establishment of a coordinate system on a line. To each point on the line, there corresponds a coordinate or real number x. Conversely for each value of x, there exists one and only one point. The point corresponding to the value 0 of x is called the origin.

ಅಧ್ಯಾಯ ೩

ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳು

೩.೧ ಗಣಿತದ ಯಾವುದೇ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲೂ, ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗದ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಗೆ ಅಳವಡುವ ಪದಗಳಿಂದಲೂ, ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣ ಗಳೆಂದೆನಿಸುವ ಸಾಧಿಸಲಾಗದ ಸ್ವತಃಸ್ಪಷ್ಟವೆನ್ನಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವಾಸ್ತವಾಂಶಗಳಿಂದಲೂ ಆರಂಭಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಮತಳ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಬೇಕಾಗುವ ಪದಗಳ ಮತ್ತು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಪರಿಚಯು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ಆಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ನೆನಪಿಗೆ ತರುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಅವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ :

ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣಕ್ಕೆ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಆಕೃತಿ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಆಕಾಶ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಬಿಂದು ಶೂನ್ಯ ಆಯಾಮವುಳ್ಳದ್ದು. ಸರಳರೇಖೆಯ ಆಯಾಮ ಒಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಮೂಲಭಾವನೆ 1. ಎರಡು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸತಕ್ಕ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲೂ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು.

ಮೂಲಭಾವನೆ 2. ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳು ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಇವೆ.

ಮೂಲಭಾವನೆ 3. ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ನಡುವೆ ಒಂದು-ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಬಹುದು.

ಮೂಲಭಾವನೆ 4. ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು, ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಇನ್ನೆರಡರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಮೂರನೆಯ ಮೂಲ ಭಾವನೆಯಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕ್ರಮವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿಗೂ ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ಎಂದರೆ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಪ್ರತಿ x ಗೂ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿರುತ್ತದೆ. x ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ಇದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಮೂಲಬಿಂದು ಎಂದು ಹೆಸರು.

The set of all points on the line between two points A and B on the line is called a segment of the line. A segment is therefore the set of all points corresponding to values of x between two given numbers a and b.

A plane is a set of points governed by the following postulates.

Postulate 5. The line joining any two points of the plane produced both ways lies completely on the plane.

Postulate 6. Through any point on the plane, there pass an infinite number of lines on the plane.

Postulate 7. Three non-collinear points determine one and only one plane.

Postulate 8. If two planes intersect, *i.e.*, have common points, they intersect in a line.

A plane is said to be two-dimensional. The set of all points whose coordinates are (x, y) referred to two intersecting lines as axes, can be considered as defining a plane.

3.2 Other one-dimensional and two-dimensional loci (*i.e.*, sets of points) may be conceived. A one-dimensional set of points corresponds to the variation of a single variable (parameter) t. This is called a *curve*. A curve may be in particular a straight line. The variation of two coordinates or parameters u and v determines a *surface*, which in particular may be a plane. Other familiar examples of surfaces are the sphere, the cone and the cylinder.

Postulate 5 may be true for surfaces other than the plane, for special positions of the points. Generators of the cone or cylinder are straight lines lying on them. But the postulate is not true if we take any two points on the cone or cylinder. The postulate is true for all positions of the two points only in the case of a plane surface.

ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ರೇಖಾ ಖಂಡವೆಂದು ಹೆಸರು. ಅದ್ದರಿಂದ, ರೇಖಾ ಖಂಡವೆಂದರೆ ಎರಡು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ x ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ.

ತಳ ಎನ್ನುವುದು ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಒಳಗಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ.

ಮೂಲಭಾವನೆ 5. ತಳದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ವರ್ಧಿಸಿದರೂ ತಳದಲ್ಲಿಯೇ ಪೂರ್ಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೂಲಭಾವನೆ 6. ತಳದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ. ತಳದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಮೂಲಭಾವನೆ 7. ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಒಂದು. ಒಂದೇ ಒಂದು ತಳ ನಿರ್ಧ್ಯಾತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೂಲಭಾವನೆ 8. ಎರಡು ತಳಗಳು ಸಂಧಿಸಿದರೆ, ಎಂದರೆ ಅವಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ತಳ ಎರಡು ಆಯಾಮಗಳದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಂಧಿಸತಕ್ಕ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, (x, y) ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ ಒಂದು ತಳವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನಬಹುದು.

3.2 ಒಂದು ಆಯಾಮದ, ಎರಡು ಆಯಾಮಗಳ ಇತರ ಬಿಂದು ಪಥಗಳನ್ನು, ಎಂದರೆ ಬಿಂದು ಗಣಗಳನ್ನು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಚರ ಸಂಖ್ಯೆ (ಪ್ರಾಚಲ) t ಯು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ, ಒಂದು ಆಯಾಮದ ಒಂದು ಬಿಂದುಗಣ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇವಕ್ಕೆ **ರೇಖೆ** ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ರೇಖೆಯು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿಯೂ ಇರಬಹುದು. ಎರಡು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರಾಚಲಗಳು u, v ಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯಿಂದ ಒಂದು **ಮೇಲ್ಮೈ** ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ, ಈ ಮೇಲ್ಮೈ ತಳವಾಗಿಯೂ ಇರಬಹುದು. ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ಇತರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಗೋಳ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂಡರ್.

ಬಿಂದುಗಳು ವಿಶೇಷಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪಡೆದಾಗ, ಮೂಲಭಾವನೆ 5 ತಳವಲ್ಲದ ಇತರ ಮೇಲ್ಮೈಗಳಿಗೂ ನಿಜವಿರಬಹುದು. ಶಂಕುವಿನ ಅಥವಾ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಜನಕ ರೇಖೆಗಳು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು. ಆದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಅಥವಾ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಈ ಮೂಲಭಾವನೆ ನಿಜವಲ್ಲ. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಈ ಮೂಲ ಭಾವನೆ ನಿಜವಿರುವುದು ತಳಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ.

The set of points whose positions depend on three coordinates or three independent variables is a three-dimensional space. Any surface such as a sphere, together with points inside and outside it constitutes a three-dimensional space.

3.3 Intersections: Two lines in a plane, if they intersect, can intersect in one point only. But, if they do not intersect, they are said to be *parallel*. The definition implies that two parallel lines lie in a definite plane.

Postulate 9. If l is any line and A a point not on l, there is one and only one line through A which is parallel to l.

This is called Euclid's parallel postulate.

Any two lines may intersect or may not intersect. If they intersect, they lie in a definite plane. For we can take the point of intersection, and one other point on each line. These three points determine a plane by Postulate 7, and by Postulate 5, the given lines lie wholly on this plane.

Two lines lines which do not intersect and which are not parallel are said to be *skew*. Two skew lines are therefore not co-planar. As an example of two skew lines, we may consider a leg of a table, and any line on the top of the table not meeting this leg.

A line, if it does not wholly lie on a given plane, can meet it in one point only, or may not meet it at all. In the latter case, the line is said to be parallel to the plane.

Two planes will either intersect in a line (Postulate 8) or will not meet at all. In the latter case they are said to be parallel.

ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಮೂರು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಎಂದರೆ ಮೂರು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದರೆ, ಇಂಥ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳ ಆಕಾಶ. ಗೋಳದಂಥ ಯಾವುದೇ ಮೇಲ್ಮೈಯ ಒಳಗೂ ಹೊರಗೂ ಮೇಲೆಯೂ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳ ಆಕಾಶಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ.

33. **ಸಂಧಿಸ್ಥಾನಗಳು.** ಒಂದುತಳದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸಿದರೆ. ಅವು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸಂಧಿಸಬಲ್ಲವು. ಸಂಧಿಸದಿದ್ದರೆ, ಅವನ್ನು **ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.** ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ತಳದಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬುದು ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿದೆ.

ಮೂಲ ಭಾವನೆ 9. *l* ಯಾವುದೇ ಸರಳ ರೇಖೆ, *l* ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಬಿಂದು A. A ಮೂಲಕ *l* ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮೂಲ ಭಾವನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸಬಹುದು, ಸಂಧಿಸದಿರಬಹುದು. ಸಂಧಿಸಿದರೆ, ಅವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತಳದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಸಂಧಿ ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಒಂದೊಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆಯೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಕೊಂಡರೆ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಮೂಲಭಾವನೆ 7 ರಂತೆ, ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ತಳವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಮೂಲ ಭಾವನೆ 5 ರಂತೆ, ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಈ ತಳದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುತ್ತವೆ.

ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸದಿದ್ದು, ಸಮಾಂತರವೂ ಆಗಿರದಿದ್ದರೆ, ಅವನ್ನು **ಅತಳ** ರೇಖೆಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಅತಳ ರೇಖೆಗಳು ಏಕತಳದಲ್ಲಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅತಳ ರೇಖೆಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಮೇಜಿನ ಒಂದು ಕಾಲು, ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಈ ಕಾಲನ್ನು ಸಂಧಿಸದಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳ ರೇಖೆ.

ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ದತ್ತ ತಳವೊಂದರ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಬಹುದು, ಅಥವಾ ಸಂಧಿಸದೆಯೇ ಇರಬಹುದು. ಎರಡನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ರೇಖೆಯ ತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ತಳಗಳು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಬಹುದು (ಮೂಲ ಭಾವನೆ 8), ಅಥವಾ ಸಂಧಿಸದೆಯೇ ಇರಬಹುದು. ಎರಡನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ತಳಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

3.4 Projective Geometry: The notion of parallelism will be greatly simplified by hypothesising infinite points and lines. In any coordinate system defining a line (Postulate 3), let the coordinate x tend to infinity. The corresponding point on the line is called *the point at infinity* on the line. All other lines through this point are parallel to the given line since they have no definite point of intersection. Hence we postulate

Postulate 10. Any two parallel lines meet at a point at infinity.

Choosing an origin O and coordinate axes Ox and Oy in a plane, we consider the set of lines $y=mx$ through O. Each one of these lines has a point at infinity. We now postulate

Postulate 11. All points at infinity in a given plane lie on one and the same straight line. This line is called the line at infinity on the plane.

Consider now a plane π and a line l which does not meet the plane. By taking two points on l and a point O on the plane, a plane is determined (Postulate 7) which must meet π in a line l', since the two planes have one point already in common, viz., O. l and l' are parallel, for if they meet in a finite point P, then l meets π in P, contrary to hypothesis. Therefore l meets the plane π at a point at infinity.

A line parallel to a plane therefore meets it at infinity.

We leave to the reader to work out arguments finally leading to

Postulate 12. Two parallel planes have the same line at infinity.

The conception of infinite elements greatly simplifies our notions. Two lines, if they are not skew, always intersect,

3.4 **ವಿಕ್ಷೇಪ ರೇಖಾಗಣಿತ.** ಸಮಾಂತರತೆಯ ಭಾವನೆ ಅನಂತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಬಹಳ ಸುಲಭಗೊಳ್ಳುವುದು. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಪಿಸುವ ಯಾವುದೇ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ (ಮೂಲ ಭಾವನೆ 3,) x ನಿರ್ದೇಶಕ ಅನಂತಕ್ಕೆ ಸರಿಯಲಿ. ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇವಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಬಿಂದುವನ್ನು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ **ಅನಂತ ಬಿಂದು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಬೇರಾವುದಾದರೂ ರೇಖೆ ಮೊದಲಿನ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ, ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಂಧಿಸ್ಥಾನವಾದ ಯಾವುದೂ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಬಿಂದುವಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ

ಮೂಲಭಾವನೆ 10. ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಅನಂತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಮೂಲಬಿಂದು O, ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳು Ox, Oy ನ್ನು ಒಂದು ತಳದಲ್ಲಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡು. O ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ $y = mx$ ಎಂಬ ಎಲ್ಲ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಗಮನಿಸುವ. ಈ ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖೆಗೂ ಒಂದು ಅನಂತ ಬಿಂದುವಿದೆ.

ಮೂಲಭಾವನೆ 11. ದತ್ತ ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಅನಂತ ಬಿಂದುಗಳೂ ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ. ಈ ರೇಖೆಗೆ ತಳದ ಅನಂತ ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಈಗ ಒಂದು ತಳ π, ಅದನ್ನು ಸಂಧಿಸದಿರುವ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ l ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. l ಮೇಲೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ತಳದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದು O ವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಒಂದು ತಳ ನಿರ್ಧಾರಿತವಾಗುತ್ತದೆ (ಮೂಲ ಭಾವನೆ 7). ಈ ತಳಕ್ಕೂ π ಗೂ ಈಗಾಗಲೇ ಒಂದು ಬಿಂದು O ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡು ತಳಗಳೂ ಒಂದು ರೇಖೆ l' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಬೇಕು. l, l' ರೇಖೆಗಳು ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಾರವು. ಏಕೆಂದರೆ, ಇಂಥ ಬಿಂದು P ಆದರೆ, l ರೇಖೆ π ಯನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವಿರೋಧ. ಆದ್ದರಿಂದ l, l' ಸಮಾಂತರ, ಎಂದರೆ l ರೇಖೆ π ತಳವನ್ನು ಒಂದು ಅನಂತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆ ತಳವನ್ನು ಅನಂತದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಭಾವನೆಗೆ ದಾರಿಗೊಡುವ ವಾದಸರಣಿಯನ್ನು ವಾಚಕರೇ ಜೋಡಿಸಲಿ.

ಮೂಲಭಾವನೆ 12. ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ತಳಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಅನಂತ ಸರಳ ರೇಖೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಅನಂತಾಂಶಗಳ ಮೂಡಿಕೆಯಿಂದ ನಮ್ಮ ಭಾವನೆಗಳು ಬಹಳವಾಗಿ ಸುಲಭಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು, ಅವು ಅತಳವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಯಾವಾಗಲೂ

either at a finite point or at infinity. A line either lies in a plane, or else it intersects the plane either at a finite point or at infinity. Two planes always intersect in a line, which is either a finite line, or which lies wholly at infinity.

A geometry which makes use of infinite elements is called projective geometry, otherwise it is called Euclidean geometry.

3.5 Construction of a plane. The construction of a plane, as visualised in Postulate 7 can be supplemented by the following, which follow as easy corollaries of Postulate 7.

A plane is determined uniquely by a line and a point outside the line.

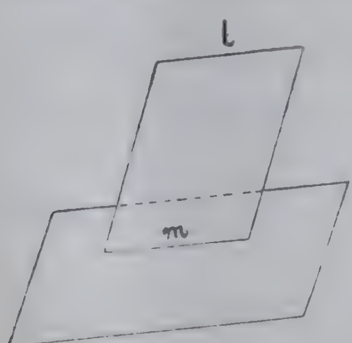
A plane is determined uniquely by two intersecting lines, or by two parallel lines (which intersect at infinity).

3.6 We now establish a number of theorems based on the above notions about the line and the plane. These theorems are absolutely necessary before an analytical geometry of three-dimensional space can be developed.

Theorem 1

If a line l *is parallel to some line* m *in a plane, then* l *is parallel to the plane.*

For the lines l and m form a plane, which meets the given plane along m. If l is not parallel to the given plane, let it meet it in a finite point P. This point P then lies in both the planes, and hence lies on m. Thus l and m meet at P contrary to hypothesis. Hence l must be parallel to the given plane.



If a line l is parallel to a plane, then any plane through l meets this plane along a line which is parallel to l.

For, if the two lines meet at a finite point P, then l meets the given plane at P, contrary to hypothesis.

ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ—ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೋ ಅನಂತದಲ್ಲೋ. ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ದತ್ತ ತಳವೊಂದರಲ್ಲಿ ಮಲಗಿರಬಹುದು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದು ತಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ—ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಅಥವಾ ಅನಂತ—ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ತಳಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖೆ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ರೇಖೆಯಾಗಿರಬಹುದು. ಇಲ್ಲವೇ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅನಂತದಲ್ಲಿರಬಹುದು.

ಅನಂತಾಂಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ವಿಕ್ಷೇಪ ರೇಖಾಗಣಿತ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಅರ್ಥಾತ್ ಅದು ಯೂಕ್ಲಿಡೀಯ ರೇಖಾಗಣಿತ,

3.5 **ತಳದ ರಚನೆ.** ಮೂಲ ಭಾವನೆ 7ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬರುವ ತಳದ ರಚನೆಗೆ ಕೆಳಗಿನವನ್ನು ಸೇರಿಸಬಹುದು. ಇವು ಮೂಲಭಾವನೆ 7ರ ಸುಲಭ ಅನುಮಿತಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯೂ ಅದರ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವೂ ತಳವನ್ನು ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ.

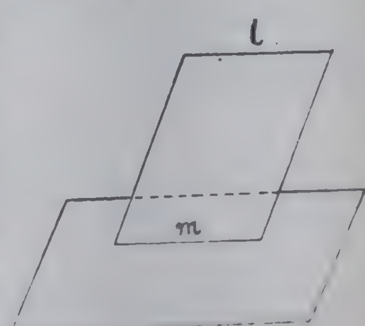
ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಾಗಲಿ, ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗಲಿ (ಇವು ಅನಂತದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ) ಒಂದು ತಳವನ್ನು ಏಕೈಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ.

3.6 ತಳ ಮತ್ತು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಮೇಲಿನ ಭಾವನೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಈಗ ಪಡೆಯುವೆವು. ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳ ಆಕಾಶದ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಬೆಳೆಸಲು ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಅತ್ಯವಶ್ಯವಾದವು.

ಪ್ರಮೇಯ ೧

l ಸರಳರೇಖೆ ಒಂದು ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ರೇಖೆ mಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ. l ರೇಖೆ ತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ.

ಏಕೆಂದರೆ. l. m ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ತಳ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ತಳ ದತ್ತತಳವನ್ನು mನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. l ರೇಖೆ ದತ್ತತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಅದು ತಳವನ್ನು ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಬಿಂದು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಈ ಬಿಂದು ಎರಡೂ ತಳಗಳಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ m ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ l, m ರೇಖೆಗಳು Pಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಇದು ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವಿರೋಧ. ಆದ್ದರಿಂದ. l ರೇಖೆ ದತ್ತತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಬೇಕು.



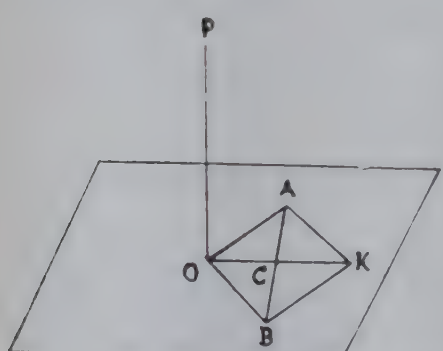
Theorem 2

Postulate 13. *If O is a point on a plane, there exists one and only one line through O which is perpendicular to all lines in the plane which pass through* O.

This line is called the *normal* at O to the plane. If P is any point on this, PO is the normal from P to the plane. The following theorem shows that the number of conditions involved in order that a line may be a normal to a plane is only two. If the line PO is perpendicular to two lines in the plane, it is perpendicular to all other lines in the plane through the point O.

Theorem 3

If O *is a point on a plane, and the line* OP *is perpendicular to two lines through* O *in the plane, then* OP *is the normal at* O *to the plane.*



Let OP be perpendicular to the lines OA and OB in the plane. Let OK be any other line through O in the plane.

To prove that OP $\perp$ OK.

Proof: Take any point K on OK and complete the parallelogram OAKB. Let OK and AB meet at C.

$$\therefore \quad AC = CB$$

From $\triangle$ PAB, $PA^2 + PB^2 = 2\,PC^2 + 2\,AC^2$

(Theorem of Apollonius)

From $\triangle$ OAB, $OA^2 + OB^2 = 2\,OC^2 + 2\,AC^2$

ಪ್ರಮೇಯ ೨

l ರೇಖೆ ಒಂದು ತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, *l* ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಯಾವುದೇ ತಳ ದತ್ತತಳವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ರೇಖೆ *l* ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

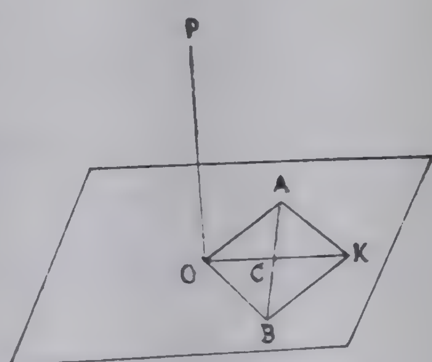
ಏಕೆಂದರೆ, ಎರಡು ರೇಖೆಗಳೂ ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತಬಿಂದು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದಲ್ಲಿ, *l* ರೇಖೆ ದತ್ತತಳವನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವಿರೋಧ.

ಮೂಲಭಾವನೆ 13. ದತ್ತತಳದಲ್ಲಿ O ಒಂದು ಬಿಂದು. O ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತ ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ, O ಮೂಲಕ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆಯಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ರೇಖೆಗೆ ತಳಕ್ಕೆ Oನಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದರ ಮೇಲೆ P ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೆ, PO ರೇಖೆ ತಳಕ್ಕೆ P ಯಿಂದ ಲಂಬ. ಒಂದು ತಳಕ್ಕೆ ಒಂದು ರೇಖೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲು ಬೇಕಾಗುವ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು ಎರಡು ಮಾತ್ರ ಎಂಬುದು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. PO ರೇಖೆ ತಳದಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅದು ತಳದಲ್ಲಿ O ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲ ರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೩

ದತ್ತ ತಳದಲ್ಲಿ O ಒಂದು ಬಿಂದು. OP ರೇಖೆ ತಳದಲ್ಲಿ O ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, OP ರೇಖೆ ತಳಕ್ಕೆ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬ.



ದತ್ತ : OP ರೇಖೆ ತಳದಲ್ಲಿರುವ OA, OB ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. OK ರೇಖೆ ತಳದಲ್ಲಿ O ಮೂಲಕ ಹೋಗಿರುವ ಬೇರೊಂದು ರೇಖೆ.

ಸಾಧನೀಯ : $OP \perp OK$.

ಸಾಧನೆ : OK ಮೇಲಣ ಒಂದು ಬಿಂದು K ಆರಿಸಿಕೊಂಡು OAKB ಎಂಬ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. OK, ABಗಳು Cಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

$$\therefore \quad AC = CB$$

$\triangle PAB$ ಯಿಂದ, $PA^2 + PB^2 = 2\,PC^2 + 2\,AC^2$ (ಅಪೊಲೋನಿಯಸ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ). $\triangle OAB$ ಯಿಂದ, $OA^2 + OB^2 = 2OC^2 + 2AC^2$

Subtracting, $(PA^2 - OA^2) + (PB^2 - OB^2) = 2(PC^2 - OC^2)$

Since POA and POB are at right angles,

$$PA^2 - OA^2 = OP^2, \quad PB^2 - OB^2 = OP^2$$

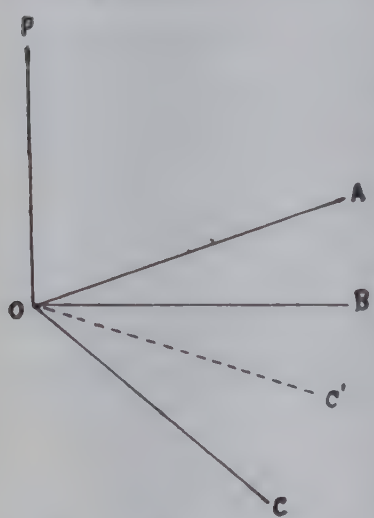
$$\therefore \quad 2OP^2 = 2(PC^2 - OC^2)$$

$$\therefore \quad OP^2 + OC^2 = PC^2$$

$\therefore$ POC, *i.e.*, POK is a right angle.

Theorem 4 (Converse of Theorem 3)

All lines perpendicular to a given line through a given point on it are co-planar.



Let OP be perpendicular to OA OB, OC.

To prove that: OA, OB, OC are co-planar.

Proof: If possible, let the plane AOB meet the plane POC not along OC, but along some other line OC′.

$\therefore$ By Theorem, 3, OP $\perp$ OC′.

Thus OC and OC′ are lines $\perp$ to OP in the same plane POC.

Hence OC′ cannot be different from OC.

i.e., OC lies in the plane AOB.

Similarly, any other line $\perp$ OP at O lies in the plane AOB.

Theorem 5 (The Theorem of Three Perpendiculars)

If from any point P *outside a plane*, PO *is drawn normal to the plane, and if* OO′ *is drawn perpendicular to a line* AB *in the plane*, *hen* PO′ *is perpendicular to* AB.

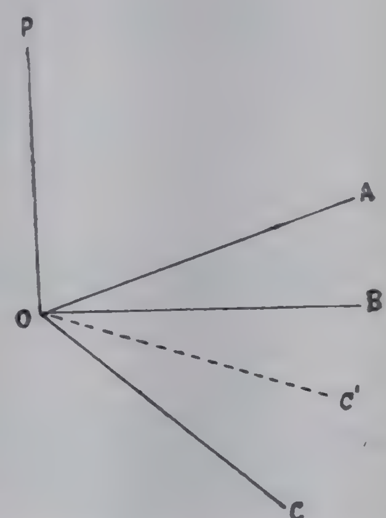
ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ. $(PA^2-OA^2)+(PB^2-OB^2)=2(PC^2-OC^2)$
POA, POB ಲಂಬಕೋನಗಳಾದುದರಿಂದ.

$$PA^2-OA^2=OP^2, \quad PB^2-OB^2=OP^2$$
$$\therefore \quad 2OP^2=2(PC^2-OC^2)$$
$$\therefore \quad OP^2+OC^2=PC^2$$

∴ POC, ಎಂದರೆ POK ಲಂಬಕೋನ.

ಪ್ರಮೇಯ ೪ (ಪ್ರಮೇಯ ೩ರ ವಿಲೋಮ)

ದತ್ತರೇಖೆಯ ದತ್ತಬಿಂದುವೊಂದರ ಮೂಲಕ ದತ್ತರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳೆಲ್ಲ ಒಂದೇ ತಳದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.



OP ರೇಖೆ OA, OB, OCಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ.

ಸಾಧನೀಯ : OA, OB, OC ಏಕ ತಳದಲ್ಲಿವೆ.

ಸಾಧನೆ : ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, AOB ತಳ POCತಳವನ್ನು OCಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಬದಲು. ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆ OC′ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

∴ ಪ್ರಮೇಯ 3ರಂತೆ. $OP \perp OC'$

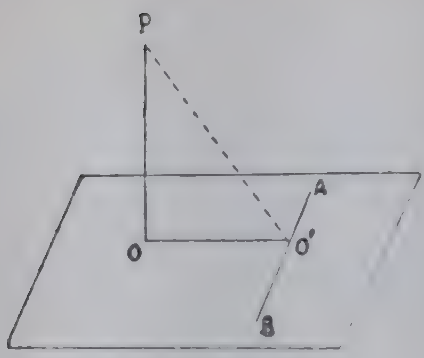
ಹೀಗೆ ಒಂದೇ ತಳ POCಯಲ್ಲಿ OPಗೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು OC, OC′ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ. OC′ ರೇಖೆ OCಗಿಂತ ಬೇರೆಯಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಎಂದರೆ. OC ರೇಖೆ AOB ತಳದಲ್ಲಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ. OP ರೇಖೆಗೆ Oನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆ AOB ತಳದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ ೫ (ತ್ರಿಲಂಬ ಪ್ರಮೇಯ)

ಒಂದು ತಳದ ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದು Pಯಿಂದ. ತಳಕ್ಕೆ PO ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ABಗೆ OO′ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ. PO′ ರೇಖೆ ABಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



Given: PO normal at O to the plane. AB is a line in the plane and $OO' \perp AB$.

To prove that: $PO' \perp AB$

Construction: Cut off $OA' = OB$

$\therefore$ Δ^s $OO'A$, $OO'B$ are congruent $\therefore$ $OA = OB$

$\therefore$ Δ^s POA, POB are congruent, since $P\hat{O}A = P\hat{O}B = 90°$, and $OA = OB$. $\therefore$ $PA = PB$

$\therefore$ Δ^s $PO'A$, $PO'B$ are congruent. $\therefore$ $PO' \perp AB$

We use the same figure to prove another result: Draw $O'P'$ the normal at O' (not shown in the figure).

$$\therefore \quad AB \perp OO', O'P, O'P'$$

$\therefore$ OO', $O'P$, $O'P'$ are co-planar (Theorem 4)

Hence, in the plane $POO'P'$, $P\hat{O}O' = O\hat{O}'P' = 90°$

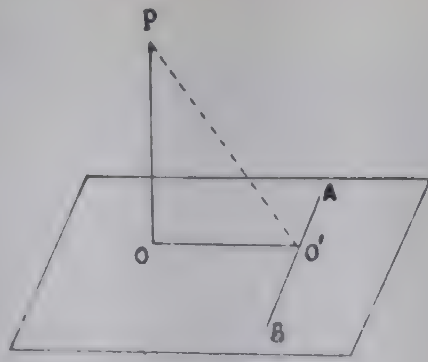
$\therefore$ $OP \parallel O'P'$

$\therefore$ The normals at any two points on a plane are parallel. This result is however more readily obtained by the method of analytical geometry, in the next chapter.

The following is a modification of the theorem of three perpendiculars, and is proved as above, with suitable modifications.

If from any point P outside a plane, PO is drawn normal to the plane, and if PO' is drawn perpendicular to a line AB in the plane, then OO' is perpendicular to AB.

Orthogonal Projection: If from any point P, the line Pp is drawn normal to a plane, the foot p of this normal is called the *orthogonal projection* (or simply the *projection*) of P on the plane. If P moves on a curve, the projection p will trace another curve which is called the projection of the given curve on the plane.



ದತ್ತ: ತಳಕ್ಕೆ Oನಲ್ಲಿ PO ಲಂಬ. ತಳದಲ್ಲಿ AB ಒಂದು ರೇಖೆ. $OO' \perp AB$.

ಸಾಧನೀಯ: $PO' \perp AB$

ರಚನೆ: $O'A = OB$ ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡಿ.

∴ OO′A, OO′B ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ.

∴ $OA = OB$

∴ POA, POB ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ, ಏಕೆಂದರೆ $POA = POB = 90°$, ಮತ್ತು $OA = OB$.

∴ $PA = PB$

∴ PO′A, PO′B ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ.

∴ $PO' \perp AB$.

ಇದೇ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಬೇರೊಂದು ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯುವೆವು. O′ನಲ್ಲಿ O′P′ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿಲ್ಲ).

∴ $AB \perp OO', O'P, O'P'$

∴ OO′, O′P, O′P′ ಏಕತಳದಲ್ಲಿವೆ (ಪ್ರಮೇಯ 4). ಆದ್ದರಿಂದ, POO′P′ ತಳದಲ್ಲಿ, $POO' = OO'P' = 90°$

∴ $OP \parallel O'P'$

∴ ಒಂದು ತಳದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಲಂಬಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶ ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ಕ್ರಮದಿಂದ ಒಡನೆಯೇ ಬರುತ್ತದೆ.

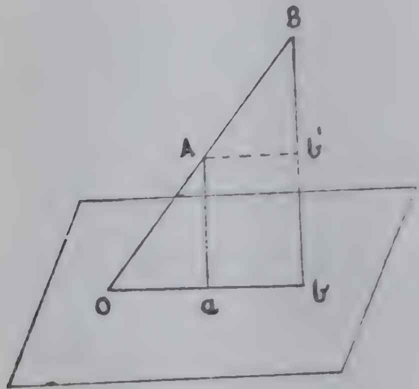
ತ್ರಿಲಂಬ ಪ್ರಮೇಯದ ಬೇರೊಂದು ರೂಪ ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಪ ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾವಣೆಗಳಿಂದ, ಸಾಧನೆ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ.

ಒಂದು ತಳದ ಹೊರಗಣ ಬಿಂದು P ಯಿಂದ, ತಳಕ್ಕೆ PO ಲಂಬವಾಗಿಯೂ, ತಳದಲ್ಲಿರುವ AB ರೇಖೆಗೆ PO′ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಇರಲಿ. ಆಗ $OO' \perp AB$.

ಲಂಬವಿಕ್ಷೇಪ: P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, P*p* ರೇಖೆ ಒಂದು ತಳಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಲಂಬದ ಬುಡ *p* ಯನ್ನು ತಳದಮೇಲೆ P ಯ ಲಂಬವಿಕ್ಷೇಪ (ಅಥವಾ ವಿಕ್ಷೇಪ, ಮಾತ್ರ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. P ಒಂದು (ವಕ್ರ) ರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಚಲಿಸಿದರೆ, ವಿಕ್ಷೇಪ ಬಿಂದು *p* ಬೇರೊಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ತಳದಮೇಲೆ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ವಿಕ್ಷೇಪ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

Theorem 6

The projection of a straight line on a plane is another straight line.



Hypthesis: AB is a given line; *a* and *b* are the orthogonal projections of A and B on a given plane.

Proof: By construction, A*a*, B*b* are the normals to the plane from A and B. Hence they are parallel and therefore co-planar. If A is taken as fixed on the line AB, the plane A*ab*B is the fixed plane through AB and A*a*. The projection of AB is the line of intersection of this plane and the given plane.

Definition: The angle between a line and a plane is defined as the angle between the line and its orthogonal projection on the plane. It is also the complement of the angle between the line and the normal to the plane.

Thus, in the above figure if the line BA meets the plane at O, the projection of O is O itself. Hence O, *a*, *b* are collinear. The angle between AB and the given plane $= a\hat{O}A =$ the complement of $O\hat{A}a$.

Draw A*b*′ ∥ *ab* to meet B*b* in *b*′. Then A*abb*′ is a rectangle.

∴ $ab = Ab' = AB \cos BAb' = AB \cos \theta$, where θ is the angle between AB and the plane. Hence,

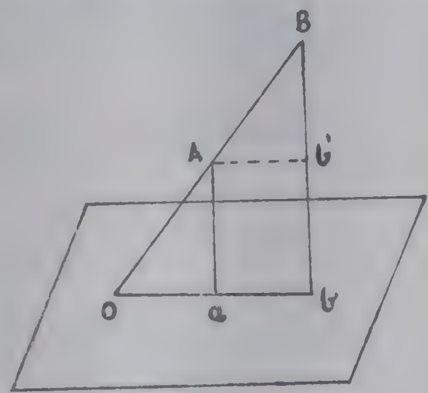
Theorem 7

The length of projection of a line segment = the length of the segment multiplied by the cosine of the angle between the line and the plane.

Corollaries: 1. If AB is parallel to the given plane its projection *ab* is parallel to AB, and $ab = AB$.

ಪ್ರಮೇಯ ೧

ಒಂದು ತಳದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ವಿಕ್ಷೇಪ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆ.



ದತ್ತ: AB ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ. ದತ್ತ ತಳದಮೇಲೆ A, B ಬಿಂದುಗಳ ಲಂಬ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳು *a*, *b*.

ಸಾಧನೆ: ರಚನೆಯುಪ್ರಕಾರ, A*a*, B*b* ರೇಖೆಗಳು ತಳಕ್ಕೆ A, Bಗಳಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಸಮಾಂತರ, ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಒಂದು ತಳದಲ್ಲಿವೆ. AB ರೇಖೆಯಮೇಲೆ A ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವೆಂದು ಗಣಿಸಿದರೆ, A*ab*B ತಳ AB ಮತ್ತು A*a* ರೇಖೆಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಒಂದು ಸ್ಥಿರತಳ. ಈ ತಳವೂ ದತ್ತ ತಳವೂ ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯೇ ABಯ ವಿಕ್ಷೇಪ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ—ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೂ ತಳವೊಂದರಮೇಲೆ ಅದರ ಲಂಬವಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೂ ಇರುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ರೇಖೆಗೂ ತಳಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನವೆಂದು ಹೆಸರು. ಇದು ರೇಖೆಗೂ ತಳದ ಲಂಬಕ್ಕೂ ಇರುವ ಕೋನದ ಪೂರಕ.

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, BA ರೇಖೆ ತಳವನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. O ನ ವಿಕ್ಷೇಪ Oವೇ. ಆದ್ದರಿಂದ O, *a*, *b* ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ. AB ಗೂ ತಳಕ್ಕೂ ಇರುವ ಕೋನ = aOA = $O\hat{A}a$ ಕೋನದ ಪೂರಕ.

*ab*ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ A*b′* ಎಳೆದು, ಇದು B*b* ಯನ್ನು *b′*ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. A*abb′*ಒಂದು ಆಯವಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad ab = Ab' = AB \cos BAb' = AB \cos \theta$, ಇಲ್ಲಿ θ ಕೋನ ABಗೂ ತಳಕ್ಕೂ ನಡುವಣ ಕೋನ. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಪ್ರಮೇಯ ೨

ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ವಿಕ್ಷೇಪದ ಉದ್ದ = ಖಂಡದ ಉದ್ದ *x* ರೇಖೆಗೂ ತಳಕ್ಕೂ ಇರುವ ಕೋನದ ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾ (ಕೊಸೈನ್).

ಅನುಮಿತಗಳು. 1. ದತ್ತ ತಳಕ್ಕೆ AB ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ವಿಕ್ಷೇಪ *ab*. ABಗೆ ಸಮಾಂತರ, ಮತ್ತು $ab = AB$.

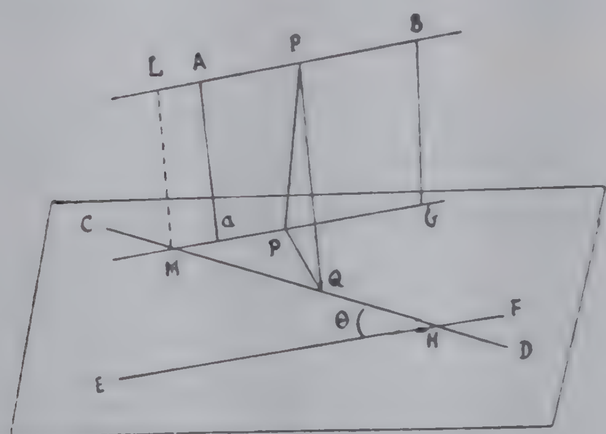
2. If two lines are parallel, their projections are also parallel.

For if the projections meet in a point, this point is the projection of a point on each of the given lines, *i.e.*, the given lines intersect, contrary to hypothesis.

3.7 The common perpendicular to two skew lines

Theorem 8

One and only one line can be drawn so as to intersect two skew lines and be perpendicular to both of them. This line is the shortest distance between the skew lines.



Hypothesis: AB and CD are skew lines.

Construction: Through any point H on CD, draw EF || AB. Then AB is parallel to the plane passing through CD and EF (Theorem 1). Let *ab* be the orthogonal projection of AB on this plane. Let *ab* cut CD in M. Let L be the point on AB whose projection is M. Then LM is perpendicular to both AB and CD.

Proof: By construction, LM ⊥ CD.

Now A*a* || B*b*, and AB || *ab* (Cor. 1. under Theorem 7)

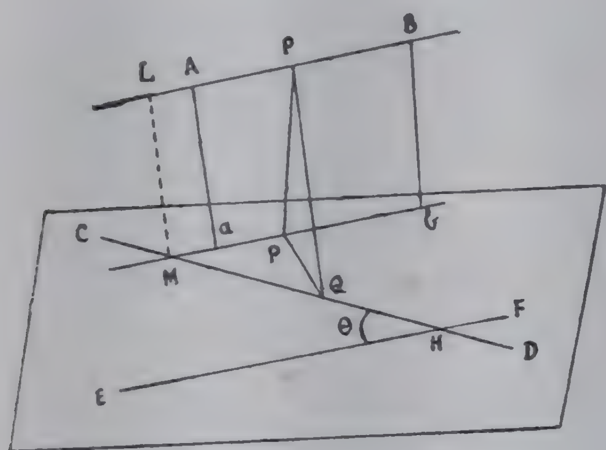
2. ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳೂ ಸಮಾಂತರ.

ಏಕೆಂದರೆ, ವಿಕ್ಷೇಪಗಳು ಸಂಧಿಸಿದರೆ, ಈ ಸಂಧಿಸ್ಥಾನ ಎರಡೂ ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ವಿಕ್ಷೇಪವಾಗಬೇಕು. ಎಂದರೆ ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ, ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವಾಗಿ.

೩.೨ ಎರಡು ಅತಳರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಂಬ

ಪ್ರಮೇಯ ೮

ಎರಡು ಅತಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸಿ ಎರಡಕ್ಕೂ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಇದು ಅತಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ: AB, CD ಎರಡು ಅತಳ ರೇಖೆಗಳು.

ರಚನೆ: CDಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು H ಮೂಲಕ ABಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ EF ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ AB ರೇಖೆಯು CD, EFಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ (ಪ್ರಮೇಯ 1.), ಈ ತಳದ ಮೇಲೆ ABಯ ಲಂಬವಿಕ್ಷೇಪ *ab* ಆಗಿರಲಿ. *ab* ರೇಖೆ CDಯನ್ನು Mನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. M ವಿಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಉಳ್ಳ AB ಮೇಲಣ ಬಿಂದು L ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ LM ರೇಖೆ AB, CD ಎರಡಕ್ಕೂ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: ರಚನೆಯ ಪ್ರಕಾರ, $LM \perp CD$. ಈಗ $Aa \parallel Bb$ ಮತ್ತು $AB \parallel ab$ (ಪ್ರಮೇಯ 7ರ ಕೆಳಗೆ ಅನುಮಿತ 1).

$\therefore$ AabB is a rectangle.

Similarly, AaML is a rectangle.

$\therefore$ ML $\perp$ AB

Thus LM is $\perp$ to both AB and CD.

Let now PQ be any other line joining AB and CD, and let p be the projection of P.

$\therefore$ PpQ is a triangle, right-angled at p.

$\therefore$ PQ $>$ Pp

But PpML is a rectangle, and Pp = LM.

$\therefore$ PQ $>$ LM.

Thus LM is the shortest distance (abbreviated to S.D.). between AB and CD.

3.8 Angle between two skew lines: Let AB, CD be two skew lines. Through any point A in AB, draw AE || CD. Then the angle between AB and CD is defined by the angle BAE. In other words, the angle between two skew lines is the angle between their directions.

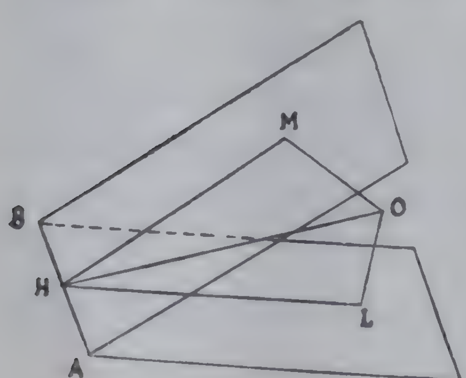


Angle between two planes:

First Definition: The angle between two planes is the angle between their normals drawn from any point.

Second Definition (Euclid's Definition):

Take any point H on the line of intersection AB of the two planes. (Consider two pages of a book opened at an angle). Draw HL and HM respectively $\perp$ to AB in the two planes. Then LHM is the angle (the dihedral angle) between the two planes.



∴ $AabB$ ಒಂದು ಆಯು

ಹೀಗೆಯೇ $AaML$ ಒಂದು ಆಯು

∴ $ML \perp AB$

ಹೀಗೆ L M ರೇಖೆ AB, CD ಎರಡಕ್ಕೂ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

ಈಗ AB, CDಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸತಕ್ಕ ಇನ್ನಾವುದಾದರೂ ರೇಖೆ PQ ಆಗಿರಲಿ. Pಯ ವಿಕ್ಷೇಪ p ಆಗಿರಲಿ.

∴ PpQ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, p ಲಂಬಕೋನ.

∴ $PQ > Pp$

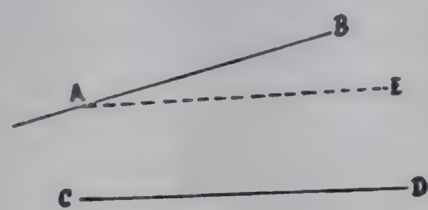
ಆದರೆ $PpML$ ಒಂದು ಆಯು, $Pp = LM$

∴ $PQ > LM$

ಹೀಗೆ AB, CDಗಳ ನಡುವೆ, LM ಕನಿಷ್ಠದೂರ (ಕ.ದೂ. ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಬರೆಯುವೆವು).

೩.೮. ಎರಡು ಅತಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ

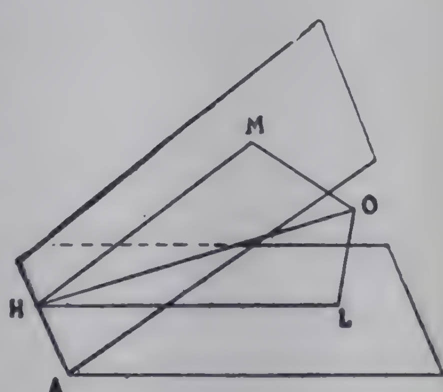
AB, CD ಎರಡು ಅತಳ ರೇಖೆಗಳು. ABಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು A ಮೂಲಕ, CDಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ AE ಎಳೆಯಿರಿ. BAE ಕೋನವನ್ನು AB,CD ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನವೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವೆವು. ಎಂದರೆ ಎರಡು ಅತಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನ ಅವುಗಳಿರುವ ದಿಕ್ಕುಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ.



ಎರಡು ತಳಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ

ಮೊದಲನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಎರಡು ತಳಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನ ಎಂದರೆ ಅವಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನ.

ಎರಡನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: (ಯೂಕ್ಲಿಡನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ) ತಳಗಳ ಸಂಧಿ ರೇಖೆ ABಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದು H ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ (ಸುಲಭಗ್ರಹಣೆಗಾಗಿ, ಒಂದು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ತೆರೆದು ಎರಡು ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ). ABಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡೂ ತಳಗಳಲ್ಲಿ HL, HM ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ತಳಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ (ದ್ವಿತಳ ಕೋನ) LHM.



Both the definitions will be useful. We prove their equivalence.

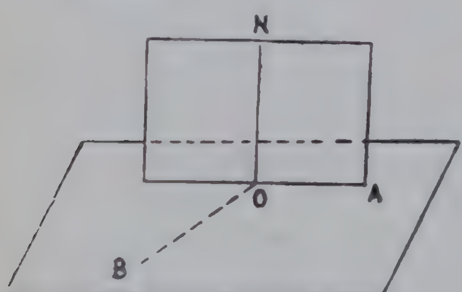
Let O be any point, not on either of the planes. Let OL, OM be the normals from O to the planes. Then LOM is the angle between the planes, according to the first definition.

Draw OH ⊥ AB. Then HM ⊥ AB in the plane ABM (Theorem 5). Similarly HL ⊥ AB in the plane ABL. Therefore LHM is the angle between the planes according to the second definition.

Now HO, HL, HM are co-planar being all ⊥ AB at H. (Theorem 4). Hence HMOL is a cyclic quadrilateral. ∴ LHM = the external angle LOM. In other words, one of the angles between the normals is equal to the dihedral angle, according to Euclid, between the planes.

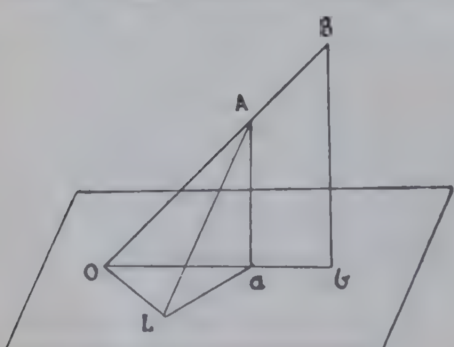
3.9 Miscellaneous useful results

1 Any plane through a normal to a plane is perpendicular to the plane.



Let ON be the normal to a given plane and OA the line of intersection of the two planes. Let OB be the normal at O to the plane NOA. Therefore OB ⊥ ON. Then, by Euclid's definition, the angle between the two planes = $N\hat{O}B = 90^\circ$.

2 The angle between a line and a plane is the least angle that the line makes with any line in the plane.



Let the line AB meet the plane at O and let *ab* be the projection of AB on the plane. Then the angle AO*a* measures the angle between the line AB and the plane.

Let OL be any other line through O in the plane.

ಎರಡು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳೂ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವೆವು.

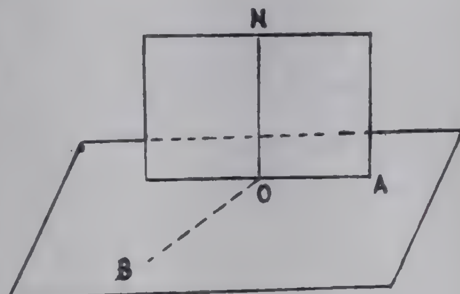
ಎರಡೂ ತಳಗಳಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಬಿಂದುವೊಂದು O ಆಗಿರಲಿ. ತಳಗಳಿಗೆ Oನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು OL, OM ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, ಮೊದಲನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, ತಳಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ LOM.

$OH \perp AB$ ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ ABM ತಳದಲ್ಲಿ $HM \perp AB$ (ಪ್ರಮೇಯ 5). ಇದರಂತೆಯೇ ABL ತಳದಲ್ಲಿ $HL \perp AB$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, ತಳಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ LHM.

ಈಗ, HO, HL, HM ಮೂರೂ ABಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಏಕತಳದಲ್ಲಿವೆ (ಪ್ರಮೇಯ 4). ಆದ್ದರಿಂದ HMOL ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ. $\therefore$ LHM = ಪೂರಕೋನ LOM. ಎಂದರೆ, ಲಂಬಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಒಂದು ಕೋನ. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಪ್ರಕಾರ, ತಳಗಣ ನಡುವೆ ಇರುವ ಮುಖ ಕೋನ.

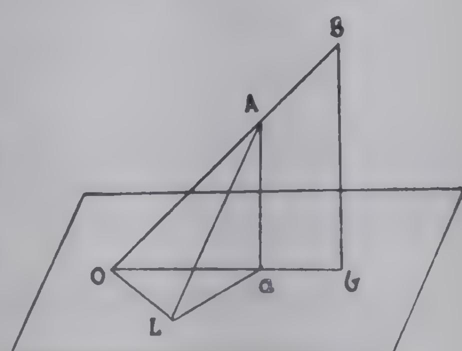
೩.೯ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ವಿವಿಧ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು

1 ಒಂದು ತಳದ ಲಂಬದ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಯಾವುದೇ ತಳ ದತ್ತ ತಳಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ON ದತ್ತತಳಕ್ಕೆ ಲಂಬ. ಎರಡೂ ತಳಗಳ ಸಂಧಿರೇಖೆ OA. NOA ತಳಕ್ಕೆ Oನಲ್ಲಿ ಲಂಬ OB ಆಗಿರಲಿ. $\therefore$ $OB \perp ON$. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, ತಳಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ = NOB = 90°.

2 ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಗೂ ತಳಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನ ಆ ಸರಳ ರೇಖೆ ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆಯೊಡನೆ ಮಾಡುವ ಕನಿಷ್ಠ ಕೋನ.



AB ರೇಖೆ ತಳವನ್ನು Oನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ತಳದಮೇಲೆ AByu ಪ್ರಕ್ಷೇಪ *ab* ಆಗಿರಲಿ. AB ರೇಖೆಗೂ ತಳಕ್ಕೂ ಇರುವ ಕೋನ A*Oa* ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ತಳದಲ್ಲಿ O ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಬೇರೊಂದು ರೇಖೆ OL ಆಗಿರಲಿ.

[If the line does not pass through O, we may consider a parallel line through O]

Draw $aL \perp OL$. Then $AL \perp OL$ (Theorem of 3 $\perp$rs).

$$\text{Now} \quad \cos AOa = \frac{Oa}{OA}, \qquad \cos AOL = \frac{OL}{OA}$$

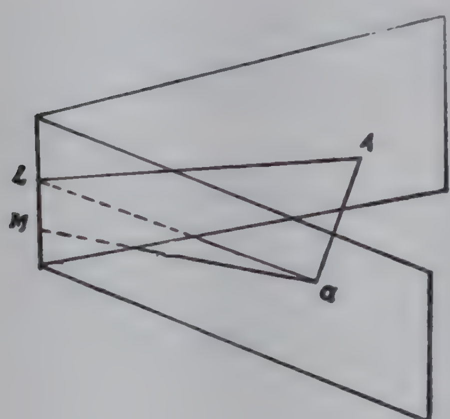
But from the rt. ∠d. △OaL, $Oa > OL$

$$\therefore \quad \cos AOa > \cos AOL$$

$$\therefore \quad AOa < AOL$$

3 The line of greatest slope on an inclined plane

This is the line perpendicular to the line in which the plane meets the horizontal.



Proof: Let LM be the line of intersection of an inclined plane with the horizontal plane. From any point A on the inclined plane draw $AL \perp LM$.

To prove that AL makes a greater angle with the horizontal plane than any other line AM on the inclined plane.

Let Aa be the normal to the horizontal.

$$\therefore \quad \sin ALa = \frac{Aa}{AL}, \qquad \sin AMa = \frac{Aa}{AM}$$

But $AM > AL \qquad \therefore \quad ALa > AMa$

4 Given two skew lines there is one and only one line passing through a given point O outside these lines and intersecting them both.

It is the line of intersection of the planes through O and each of the lines.

[ಬೇರೊಂದು ರೇಖೆ O ಮೂಲಕ ಹೋಗದಿದ್ದರೆ O ಮೂಲಕ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು].,

$aL \perp OL$ ಆಗುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ $AL \perp OL$ (ತ್ರಿಲಂಬ ಪ್ರಮೇಯ).

ಈಗ $\cos AOa = \frac{Oa}{OA}$, $\cos AOL = \frac{OL}{OA}$

OaL ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾದ್ದರಿಂದ $Oa > OL$

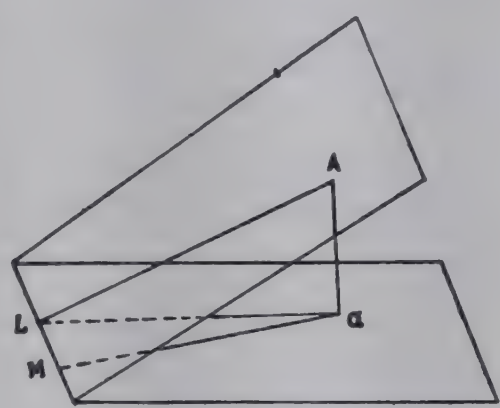
$\therefore \cos AOa > \cos AOL$

$\therefore AOa < AOL$

3 ಬಾಗುತಳದ ಮೇಲೆ ಗರಿಷ್ಠ ಓಟದ ಸರಳ ರೇಖೆ

ಕ್ಷಿತಿಜ ತಳವನ್ನು ತಳ ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಇದು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ. ಒಂದು ಬಾಗು ತಳಕ್ಕೂ ಕ್ಷಿತಿಜ ತಳಕ್ಕೂ ಸಂಧಿರೇಖೆ LM ಆಗಿರಲಿ. ಬಾಗುತಳದ ಒಂದು ಬಿಂದು Aಯಿಂದ, LMಗೆ ಲಂಬ ವಾಗಿ AL ಎಳೆಯಿರಿ.



ಕ್ಷಿತಿಜ ತಳದೊಡನೆ, ಬಾಗುತಳದ ಮೇಲಿರುವ ಇನ್ನು ಯಾವುದೇ ರೇಖೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಿಂತ, AL ಹೆಚ್ಚಿನ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಕ್ಷಿತಿಜ ತಳಕ್ಕೆ Aa ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ.

$\therefore \sin ALa = \frac{Aa}{AL}$, $\sin AMa = \frac{Aa}{AM}$

ಆದರೆ $AM > AL$ $\therefore ALa > AMa$

4 ಎರಡು ಅತಳರೇಖೆಗಳು ದತ್ತವಾಗಿವೆ. ಈ ಎರಡನ್ನೂ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದು O ಮೂಲಕ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

O ಮೂಲಕವೂ ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳ ಒಂದೊಂದರ ಮೂಲಕವೂ ಹೋಗುವ ತಳಗಳ ಸಂಧಿ ರೇಖೆಯೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ರೇಖೆ.

Exercises

1 If AB, CD are skew lines prove that AC, BD and AD, BC are also skew.

2 Through the circumcentre of a triangle the normal is drawn to the plane of the triangle. Prove that any point on this normal is equidistant from the vertices of the triangle.

3 The middle points of the sides of a skew quadrilateral form a parallelogram whose plane is parallel to the two diagonals of the quadrilateral.

4 Show how to draw through a given point the plane parallel to each of two skew lines.

5 Show that there are two parallel planes each containing one of two given skew lines.

6 The locus of a point in space which is equidistant from two given points A and B is the plane normal to AB drawn through the middle point of AB.

7 The locus of a point equidistant from two intersecting planes is the pair of planes bisecting their dihedral angles.

8 The locus of a point at a constant distance from a given plane is a parallel plane.

9 Let P be any point outside a plane, and l any line in the plane. Draw PO′ $\perp l$ and draw the line through O′ in the plane, $\perp l$. If PO is drawn $\perp$ to this line, then PO is the normal from P to the plane.

[This is another form of the theorem of three $\perp$rs, and gives the practical construction to draw the normal to a plane from an external point. Use the figure of Theorem 5.]

10 Prove the following construction for drawing the normal to a plane at a point O on it: Draw OO′ $\perp$ to some line l in the plane not passing through O. At O′ draw any line O′Q

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1 AB, CD ಅತಳರೇಖೆಗಳಾದರೆ AC, BD ಮತ್ತು AD, BC ಸಹ ಅತಳರೇಖೆಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

2 ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಪರಿವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ, ತ್ರಿಭುಜದ ತಳಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದಿದೆ. ಈ ಲಂಬದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. .

3 ಅತಳ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರ ತಳ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳಿಗೂ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ.

4 ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎರಡು ಅತಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಎರಡಕ್ಕೂ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ತಳವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5 ಎರಡು ದತ್ತ ಅತಳರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮಾಂತರವಾದ ಎರಡು ತಳಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6 ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದು A, Bಗಳಿಗೆ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ AB ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ತಳ.

7 ಎರಡು ಸಂಧಿಸುವ ತಳಗಳಿಗೆ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಅವುಗಳ ಮುಖಕೋನಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ತಳದ್ವಯ.

8 ದತ್ತ ತಳಕ್ಕೆ ಸ್ಥಿರದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ತಳ.

9 ಒಂದು ತಳದ ಹೊರಗೆ P ಒಂದು ಬಿಂದು, ತಳದಲ್ಲಿ l ಒಂದು ರೇಖೆ l ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ PO′ ಎಳೆದು, O′ ಮೂಲಕ ತಳದಲ್ಲಿ l ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗೆ PO ಲಂಬವಾದರೆ P ಯಿಂದ ತಳಕ್ಕೆ PO ಲಂಬವಾಗುತ್ತದೆ.

[ಇದು ತ್ರಿಲಂಬ ಪ್ರಮೇಯದ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪ. ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತಳಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಲು ರಚನಾಕ್ರಮವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 5ರ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ].

10 ತಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದು Oನಲ್ಲಿ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ರಚನಾಕ್ರಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ: O ಮೂಲಕ ಹೋಗದೆ ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆ l ಗೆ OO′ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. O′ ನಲ್ಲಿ l ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ತಳದಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಒಂದು

$\perp l$ outside the plane. From any point Q on O′Q draw QR $\perp$ OO′. Then the line through O parallel to RQ is the normal at O to the plane.

11 OA, OB, OC are three mutually perpendicular lines and OH is the normal from O to the plane ABC. Then H is the orthocentre of $\triangle$ ABC (use Ex. 9).

12 A line parallel to each of two intersecting planes is parallel to their line of intersection.

ರೇಖೆ O′Q ಎಳೆಯಿರಿ. O′Q ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು Q ನಿಂದ OO′ ಗೆ ಲಂಬ ವಾಗಿ QR ಎಳೆಯಿರಿ. O ಮೂಲಕ RQ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆ ತಳಕ್ಕೆ O ನಲ್ಲಿ ಲಂಬ.

11 OA, OB, OC ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳು. O ನಿಂದ ABC ತಳಕ್ಕೆ OH ಲಂಬ. ಈಗ H ಬಿಂದು ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು (ಉದಾ. 9 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ).

12 ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ತಳಗಳಿಗೆ, ಎರಡಕ್ಕೂ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆ ತಳಗಳ ಸಂಧಿ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ.

CHAPTER VI

COORDINATES AND DIRECTION COSINES

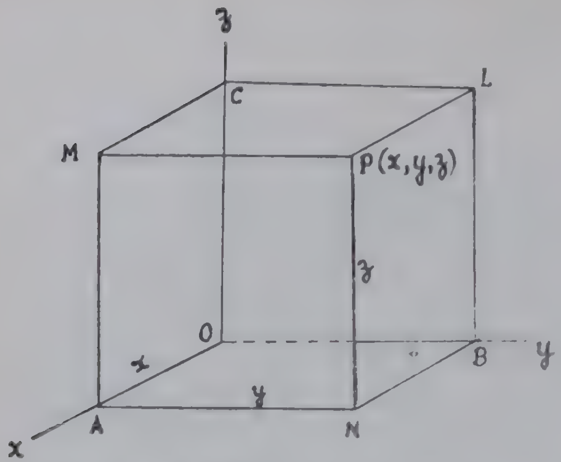
4.1 Rectangular cartesian coordinates. Choose any arbitrary point O in three dimensional space as origin and any three mutually perpendicular straight lines through O as the axes of coordinates. The corner of a room where the two vertical walls and the horizontal floor meet is a familiar example. The axes are called the x, y, z axes and indicated by Ox, Oy, Oz. On producing these lines on either side of the origin, we get three mutually perpendicular and concurrent lines x'Ox, y'Oy, z'Oz. These lines contain three different planes—yz-plane, zx-plane, xy-plane or simply x-plane, y-plane, z-plane. It is clear that the x-axis is perpendicular to the x-plane, the y-axis to the y-plane and the z-axis to the z–plane. These three planes together are called the coordinate planes. They are mutually perpendicular and they concur at the origin. The intersections of these planes are the coordinate axes. With this system of coordinate axes any point in space can be uniquely represented in terms of its distances from the coordinate planes or in terms of the distances one has to move parallel to the coordinate axes. The convention we have adopted in the two-dimensional (or plane) analytical geometry with regard to the measurement and signs of the distances is followed here also—distances are measured in an orderly way, first parallel to the x-axis, second to the y-axis and finally to z-axis. Further, Ox, Oy, Oz are taken as the positive directions and Ox', Oy', Oz' the negative directions of the axes.

ಅಧ್ಯಾಯ ೪

ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಮತ್ತು ದಿಕ್ಕೋಟಿಗಳು

೪.೧ ಲಂಬೀಯ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಇಷ್ಟಬಂದ ಒಂದು ಬಿಂದು Oವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ ಅದರ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬೀಯ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳಾಗಿಯೂ ಆಯಬೇಕು. ಒಂದು ಕೋಣೆಯ ಯಾವುದೇ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಇದರ ನಿದರ್ಶನ ನೋಡಬಹುದು—ಎರಡು ಊರ್ಧ್ವ ಗೋಡೆಗಳೂ ಕ್ಷಿತಿಜನೆಲವೂ ಅಲ್ಲಿ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬೀಯ ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ. ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು x, y, z ಅಕ್ಷಗಳೆಂದು ಕರೆದು Ox Oy, Oz ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಉಭಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಿಗೂ ವೃದ್ಧಿಸಿ ಒಟ್ಟು ರೇಖೆಗಳನ್ನು $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮೂರು ಅಕ್ಷಗಳು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಮೂರು ಭಿನ್ನ ಸಮತಲಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ: $y'Oy$, $z'Oz$ ಅಕ್ಷಗಳು yz-ಸಮತಲವನ್ನೂ $z'Oz$, $x'Ox$ ಅಕ್ಷಗಳು zx-ಸಮತಲವನ್ನೂ $x'Ox$, $y'Oy$ ಅಕ್ಷಗಳು xy-ಸಮತಲವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಈ ಸಮತಲಗಳ ಹೆಸರು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ x, y, z ಸಮತಲಗಳು. ಅಂದರೆ x-ಸಮತಲಕ್ಕೆ Ox ಅಕ್ಷ ಲಂಬವಾಗಿದೆ: y-ಸಮತಲಕ್ಕೆ Oy ಅಕ್ಷ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. z-ಸಮತಲಕ್ಕೆ Oz ಅಕ್ಷ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಈ ಮೂರು ಸಮತಲಗಳ ಒಟ್ಟು ಹೆಸರು ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲಗಳು. ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳ ಛೇದನ ರೇಖೆಗಳು ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳು; ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದು ಮೂಲಬಿಂದು. ಈ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಬಿಂದುವನ್ನೂ ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲಗಳಿಂದ ಅದರ ದೂರಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಅಥವಾ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಸಾಗಬೇಕಾದ ದೂರಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಏಕೈಕವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಸಮತಳ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅನುಸರಿಸಿದ ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ: x, y, z ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ ದೂರಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು Ox, Oy, Oz ದಿಶೆಗಳನ್ನು ಧನದಿಶೆಗಳೆಂದೂ Ox', Oy', Oz' ದಿಶೆಗಳನ್ನು ಋಣದಿಶೆಗಳೆಂದೂ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

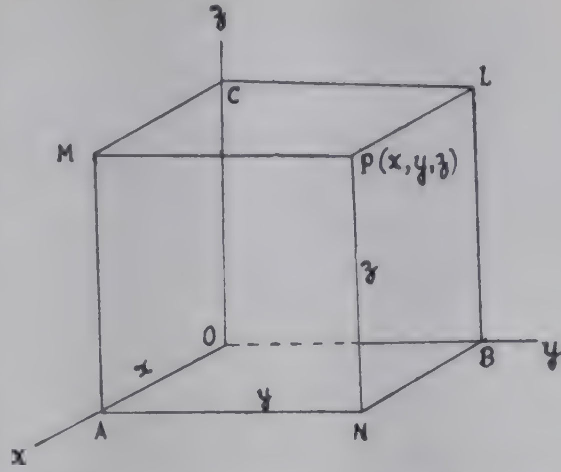


Let P be any point in space. Draw PL, PM, PN perpendiculars to the coordinate planes. Complete the rectangular parallelepiped as shown in the figure. Let OA $=x$, OB $=y$, OC $=z$. It is easy to see that we can reach P from O by moving along the axes (or parallel to them) x, y, z in that order. We adopt this method as a convention. Further, if the distances are measured in Ox', Oy', Oz' directions negative signs are attached to the measures of the distances. x, y, z are called the coordinates of P and are written (x, y, z). The coordinates of any point are called an ordered trio. For a given point the ordered trio is unique and conversely for a given ordered trio the point is unique. This is the essence of the rectangular cartesian coordinate system.

4.2 Octants. The coordinate axes divide the space into eight parts, each part being called an *octant.* The following statement will show the signs of the coordinates in these octants.

Octant	$Oxyz$	$Ox'yz$	$Oxy'z$	$Oxyz'$	$Ox'y'z$	$Oxy'z'$	$Ox'yz'$	$Ox'y'z'$
x	+	–	+	+	–	+	–	–
y	+	+	–	+	–	–	+	–
z	+	+	+	–	+	–	–	–

In three-dimensional geometry we adopt the following convention with regard to the direction of rotation: the direction that takes Ox to Oy, Oy to Oz, Oz to Ox is positive and the opposite direction is negative.



ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ P ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ. PL, PM, PNಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿರುವಂತೆ ಲಂಬೀಯ ಸಮಾಂತರ ಷಟ್ಫಲಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ Oನಿಂದ ಹೊರಟು ಈ ದೂರಗಳನ್ನು ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಗಮಿಸಿ (ಅಂದರೆ $OA=x$, $AN=OB=y$, $NP=OC=z$) Pಯನ್ನು ತಲುಪಬಹುದು. ಈ ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನು ನಾವು ಪ್ರಸಕ್ತಾಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಷ್ಟಲ್ಲದೇ ದೂರಗಳನ್ನು Ox', Oy' Oz' ದಿಶೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆದಾಗ ದೂರಮಾನಗಳಿಗೆ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುತ್ತೇವೆ. x, y, zಗಳು Pಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. ಇವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನ $P(x, y, z)$. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧ ತ್ರಯವೆಂದು ಕರೆಯುವುದಿದೆ. ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಕ್ರಮಬದ್ಧ ತ್ರಯ ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ; ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಒಂದು ದತ್ತ ಕ್ರಮಬದ್ಧ ತ್ರಯ ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ.

ಇದು ಲಂಬೀಯ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಾರ.

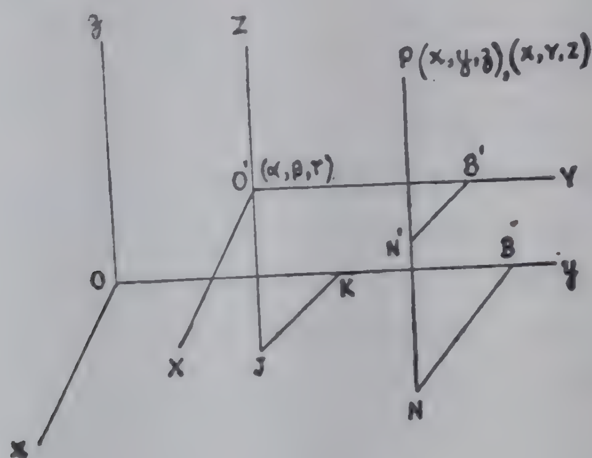
೪.೨ ಅಷ್ಟಕಗಳು

ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳು ಆಕಾಶವನ್ನು ಎಂಟು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ಹೆಸರು ಅಷ್ಟಕ. ಈ ಅಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ತೋರಿಸುವುದು.

ಅಷ್ಟಕ	$Oxyz$	$Ox'yz$	$Oxy'z$	$Oxyz'$	$Ox'y'z$	$Oxy'z'$	$Ox'yz'$	$Ox'y'z'$
x	+	−	+	+	−	+	−	−
y	+	+	−	+	−	−	+	−
z	+	+	+	−	+	−	−	−

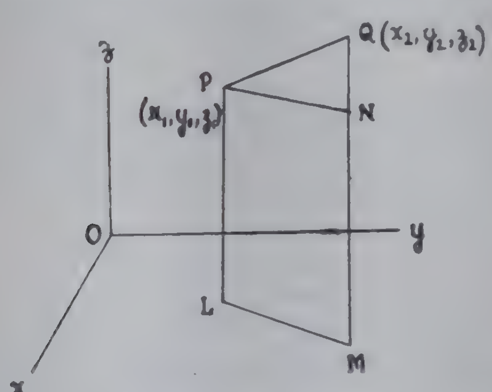
ಮೂರು ಆಯಾಮಗಳ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಆವರ್ತನೆಯ ದಿಶೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ: Oxನ್ನು Oyಗೂ Oyನ್ನು Ozಗೂ Ozನ್ನು Oxಗೂ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುವ ದಿಶೆ ಧನದಿಶೆ ; ಇದರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆ ಋಣದಿಶೆ.

4.3 Change of origin. Let $Oxyz$ be the given coordinate system. Let P (x, y, z) be any point. Give a parallel displacement (coordinate system moving parallel to the original directions) to the system by which O is shifted to O′ whose coordinates with reference to $Oxyz$ are (α, β, γ). Let the new axes be O′X, O′Y, O′Z. If the coordinates of P with reference to the O′XYZ are (X, Y, Z) then we have



$z = NP = NN' + N'P = JO' + N'P = \gamma + Z$. Similarly $x = \alpha + X$, $y = \beta + Y$. These are the formulae for a parallel displacement of the coordinate system through α, β, γ.

4.4 Distance between two points. Let P (x_1, y_1, z_1) and Q (x_2, y_2, z_2) be the two given points and d the distance between them. Draw PL, QM perpendiculars to the z-plane.

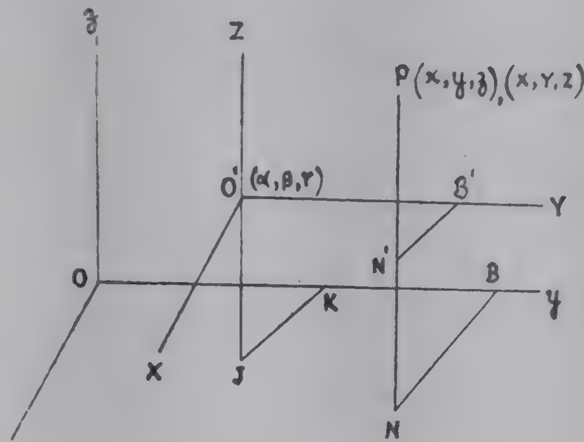


Draw PN perpendicular to MQ. It may be noted that PN and LM are equal and parallel and both are perpendiculars to MQ. From the right-angled triangle PNQ $d^2 = PQ^2 = PN^2 + NQ^2 = LM^2 + (z_2 - z_1)^2$. Now L is (x_1, y_1) and M is (x_2, y_2) in the z-plane. We know

$$LM^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

೪.೩ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಬದಲಿ

$Oxyz$ ದತ್ತ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಆಗಿರಲಿ. $P(x, y, z)$ ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಪರಿವರ್ತನೆ (ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಮೂಲದಿಶೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಚಲಿಸುವುದು) ನೀಡಬೇಕು. ಇದರಿಂದ O ಬಿಂದು O′ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಾಗಲಿ. $Oxyz$ನ್ನು ಕುರಿತು O′ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (α, β, γ) ಆಗಿರಲಿ. ನೂತನಾಕ್ಷಗಳು O′X, O′Y, O′Z ಆಗಿರಲಿ. O′XYZನು ಕುರಿತು Pಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (X, Y, Z) ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ



$$z = NP = NN' + N'P$$
$$= JO' + N'P$$
$$= \gamma + Z$$

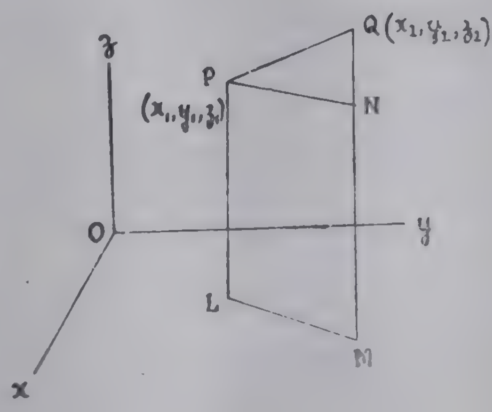
ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ

$$x = \alpha + X$$
$$y = \beta + Y$$

ಇವು ಸಮಾಂತರ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು; ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಮೌಲ್ಯ (α, β, γ).

೪.೪ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$P(x_1, y_1, z_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2, z_2)$ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. d ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವಾಗಿರಲಿ. PL, QM ಗಳನ್ನು z–ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು. PN ಮತ್ತು LMಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಅವೆರಡೂ MQಗೆ ಲಂಬಗಳು.



$\triangle$ PNQ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$d^2 = PQ^2 = PN^2 + NQ^2$$
$$= LM^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$LM^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

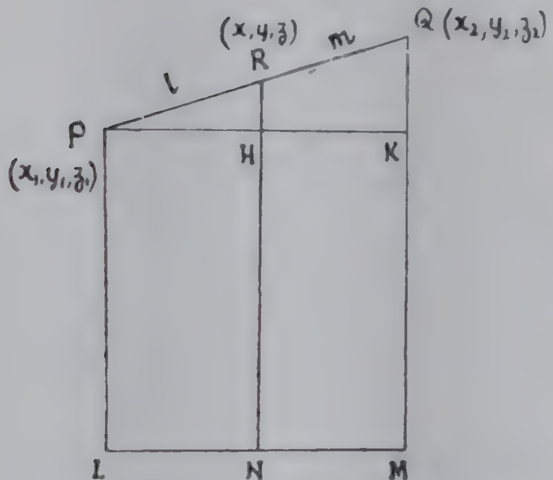
$$\therefore \; d^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

The distance of the point (x, y, z) from the origin is $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4.5 Coordinates of the point dividing the join of two given points in a given ratio. Let P (x_1, y_1, z_1) and Q (x_2, y_2, z_2) be the two given points. Let R (x, y, z) divide PQ in the ratio $l : m$. Draw PL, QM, RN perpendiculars to the z-plane.

$$\frac{l}{m} = \frac{PR}{RQ} = \frac{PH}{HK} = \frac{x-x_1}{x_2-x}$$

$$\therefore \; x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}$$



Similarly,

$$y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m}$$

$$z = \frac{lz_2 + mz_1}{l + m}$$

$$\therefore \; \text{R is } \left[\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}, \frac{lz_2 + mz_1}{l + m}\right]$$

When R is an internal point $l : m$ is positive and when it is an external point $l : m$ is negative. With this convention the above formula can be seen to be true in both the cases.

The coordinates of the midpoint of PQ are

$$\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right]$$

Examples

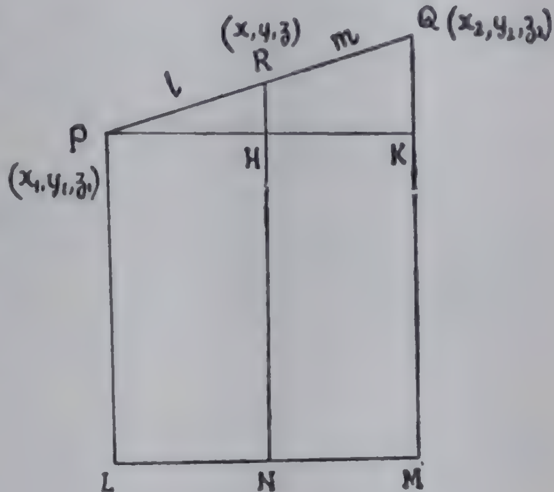
1 Find the coordinates of the sphere passing through the points O (0, 0, 0), A (0, 2, 0), B (1, 0, 0), C (0, 0, 4).

$\therefore\ d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ (x, y, z) ಬಿಂದುವಿನ ದೂರ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

೪.೫ ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ದತ್ತ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$P(x_1, y_1, z_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2, z_2)$ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $R(x, y, z)$ PQ ವನ್ನು $l : m$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸಲಿ. PL, QM, RNಗಳನ್ನು z—ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು.



$$\frac{l}{m} = \frac{PR}{RQ} = \frac{PH}{HK} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$\therefore\ x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}$$

ಇದೇ ರೀತಿ $y = \dfrac{ly_2 + my_1}{l + m}$

$$z = \frac{lz_2 + mz_1}{l + m}$$

$$\therefore\ R \text{ ಬಿಂದು } \left[\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}, \frac{lz_2 + mz_1}{l + m} \right]$$

R ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುವಾದರೆ $l : m$ ಧನಾತ್ಮಕ ; R ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುವಾದರೆ $l : m$ ಋಣಾತ್ಮಕ. ಈ ಸಂಪ್ರದಾಯದ ಪ್ರಕಾರ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

PQವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. O (0,0,0), A (0,2,0), B (1,0,0,) C (0,0,4) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Let S (x, y, z) be the centre of the sphere. Then SA = SB = SC = SO

$$\therefore \quad x^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$
$$= x^2+y^2+(z-4)^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\therefore \quad x = \tfrac{1}{2},\ y = 1,\ z = 2$$

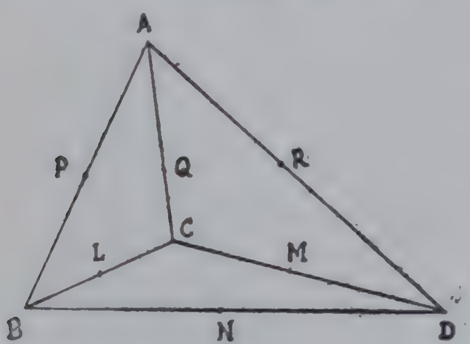
Centre is $(\frac{1}{2}, 1, 2)$

2 Find the centroid of the triangle ABC whose vertices are (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

Let A′ be the midpoint of BC. Then A′ is $\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}, \dfrac{z_2 + z_3}{2}\right)$. If G be the centroid of the triangle ABC then AG: GA′ = 2 : 1. Therefore the coordinates of G are $\left[\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right]$.

3 Prove that the joins of the midpoints of pairs of opposite sides of a tetrahedron bisect one another.

Tetrahedron is the figure bounded by four triangles having six common edges.



Let ABCD be the tetrahedron. Let the coordinates of the vertices be A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2), C (x_3, y_3, z_3), D (x_4, y_4, z_4)

The coordinates of P, the midpoint of AB, are

$$\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right]$$

CD is the opposite edge to AB. The coordinates of its midpoint M are $\left[\dfrac{x_3 + x_4}{2}, \dfrac{y_3 + y_4}{2}, \dfrac{z_3 + z_4}{2}\right]$. Therefore the midpoint of PM is $\left[\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \dfrac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right]$. The symmetry

$S(x, y, z)$ ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $SA = SB = SC = SO$.

$$\therefore \quad x^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$
$$= x^2 + y^2 + (z-4)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\therefore \quad x = \tfrac{1}{2}, \ y = 1, \ z = 2$$

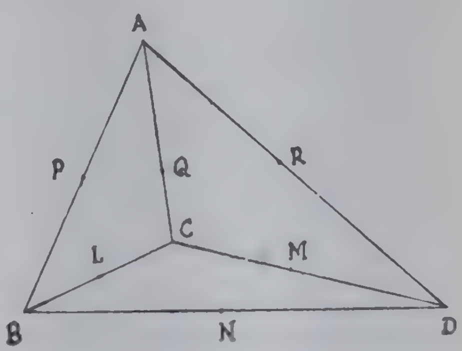
ಕೇಂದ್ರ $(\tfrac{1}{2}, 1, 2)$

2 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ಬಿಂದುಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ $\triangle ABC$ ಯ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

BC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು A' ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$. $\triangle ABC$ ಯ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ G ಆಗಿದ್ದರೆ $AG : GA' = 2 : 1$. ಆದ್ದರಿಂದ G ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right]$$

3 ಒಂದು ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಒಂದೊಂದು ಜೊತೆ ಎದುರು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಅವುಗಳೊಳಗೆ ಆರು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಚುಗಳಿರುವಂತೆ ರಚಿಸುವ ಆಕೃತಿ ಚತುಷ್ಫಲಕ. ABCD ಚತುಷ್ಫಲಕವಾಗಿರಲಿ. ಅದರ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_2, y_3, z)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ ಆಗಿರಲಿ. AB ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right]$. AB ಯ ಎದುರು ಭುಜ CD. CD ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು M ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\left[\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}, \frac{z_3+z_4}{2}\right]$.

ಆದ್ದರಿಂದ PM ನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು $\left[\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_2+y_2}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right]$. ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸಮಾಂಗತ್ವದಿಂದ ಉಳಿದೆರಡು ಜೊತೆ

of this result shows that the midpoint of the join of the midpoints of any other pair of opposite edges is also the same point. This proves the problem.

4.6 Projection. The projection of PQ on any line l is the segment of l which is intercepted by the feet of the perpendiculars from P and Q on l. Draw a line through P parallel to l. If the angle between PQ and this parallel line is θ then the projection of PQ on l is PQ $\cos\theta$.

Let A, A_2, A_3,·····, A_{n-1}, B be a set of n points. Then the segments we get by joining A, A_2; A_2, A_3; ···; A_{n-1}, B are said to form the *broken line* $AA_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}B$. Let l be any straight line. If the angle between AA_2 and the parallel through A to l be α_1, between A_2A_3 and the parallel through A_2 to l be α_2 and so on then the algebraic sum of the projections of the broken line on l is $AA_2 \cos\alpha_1 + A_2A_3 \cos\alpha_2 + \cdots + A_{n-1} B \cos\alpha_{n-1}$. If the feet of the perpendiculars from A, A_2, A_3, ···, A_{r-1} B on l are L, L_2, L_3, ··· L_{n-1}, M then this algebraic sum is equal to $LL_1 + L_1L_2 + L_2L_3 + \cdots L_{n-1} M = LM$. But LM is equal to the projection of the segment AB on l. Hence we have the following property: The algebraic sum of the projections of a broken line on a given line is equal to the projection on the given line of the segment joining the endpoints.

4.7 Direction cosines. We know what is meant by the angle between two intersecting (or parallel straight) lines. These are *coplanar* straight lines. When two straight lines are *nonplanar* they do not intersect; nor are they parallel. We take a point on one of them and through it draw the parallel to the other line. The angle between this parallel and the line it intersects is the angle between the two nonplanar lines (§ 3.8). Nonplanar

ಎದುರು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳೂ ಇದೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಾಧಿತವಾಯಿತು.

೪.೬ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ

l ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P, Q ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಲಂಬಗಳನ್ನೆಳೆದಾಗ ದೊರೆಯುವ lನ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ l ಮೇಲೆ PQ ವಿನ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ ಎಂದು ಹೆಸರು. P ಯ ಮೂಲಕ lಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. PQ ಮತ್ತು ಈ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಆಗಿದ್ದರೆ l ಮೇಲೆ PQ ವಿನ ಪ್ರಕ್ಷೇಪದ ಉದ್ದ PQ $\cos\theta$.

$A, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, B$ ಇವು n ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ A, A_2 ; A_2, A_3 ;…… ; $A_{n-1}B$ ಈ ಬಿಂದು ಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ದೊರೆಯುವ ಖಂಡಗಳಿಗೆ ಮುರಿದರೇಖೆ $AA_2A_3\cdots A_{n-1}B$ ಎಂದು ಹೆಸರು. l ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಆಗಿರಲಿ. AA_2 ಮತ್ತು A ಮೂಲಕ lಗೆ ಎಳೆದ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಕೋನ α_1, A_2A_3 ಮತ್ತು A_2 ಮೂಲಕ lಗೆ ಎಳೆದ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಕೋನ α_2 ಇತ್ಯಾದಿ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮುರಿದ ರೇಖೆಯ l ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಗಳ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ $AA_2\cos\alpha_1 + A_2A_3\cos\alpha_2 + \ldots + A_{n-1}B\cos\alpha_{n-1}$. $A, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_{n-1}, B$ ಯಿಂದ lಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಪಾದಗಳು $L_1, L_2, L_3, \ldots\ldots, L_{n-1}, M$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಈ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ $LL_1 + L_1L_2 + L_2L_3 + \ldots + L_{n-1}M = LM$. ಆದರೆ l ಮೇಲೆ AB ಯ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ LM. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು : ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮುರಿದ ರೇಖೆಯ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಗಳ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತ ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮುರಿದ ರೇಖೆಯ ಕೊನೆಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆಯ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ ಸಮ.

೪.೭ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು

ಛೇದಿಸುವ ಅಥವಾ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಎಂದರೇನು ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇವು ಸಮತಲೀಯ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು. ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಅಸಮತಲೀಯವಾದಾಗ ಅವು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅವು ಸಮಾಂತರವೂ ಅಲ್ಲ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆರಿಸಿ ಅದರ ಮೂಲಕ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಇದು ಛೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ (§ 3.8). ಅಸಮತಲೀಯ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅತಳ ರೇಖೆಗಳೆಂದೂ

lines are also called *skew* lines. The angle between a pair of *skew* edges of a cube can be easily seen to be a right angle.

Let P (x_1, y_1, z_1) and Q (x_2, y_2, z_2) be any two points. Let α, β, γ be the angles between PQ and the positive directions of the coordinate axes. Draw PL, QM perpendiculars on Ox. Then LM $= x_2 - x_1$. But LM is the projection of PQ on Ox. Therefore LM = PQ $\cos\alpha$.

$$\therefore \quad x_2 - x_1 = \text{PQ}\cos\alpha$$

$$\text{Similarly,} \quad y_2 - y_1 = \text{PQ}\cos\beta$$

$$z_2 - z_1 = \text{PQ}\cos\gamma$$

$$\therefore \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{PQ}^2[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma]$$

$$\text{But} \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{PQ}^2$$

$$\therefore \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (that is cosines of the angles made by PQ with the positive directions of the coordinate axes) are called the *direction cosines* of PQ. They are connected by the relationship derived above.

If two straight lines are parallel then their direction cosines must be equal.

We shall often say that the direction cosines of a line are proportional to (l, m, n). That is, $\cos\alpha \propto l$, $\cos\beta \propto m$, $\cos\gamma \propto n$. These proportionals are called *direction ratios.* We have

$$\cos\alpha = lk, \cos\beta = mk, \cos\gamma = nk$$

$$\therefore \quad k^2(l^2 + m^2 + n^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

We take by convention the positive root. Hence when the direction ratios are given the direction cosines can be calculated.

We have shown $\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{\text{PQ}}$ $\quad \cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{\text{PQ}}$,

$\cos\gamma = \dfrac{z_2 - z_1}{\text{PQ}}$. Therefore the direction ratios of PQ are $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

ಕರೆಯುವುದಿದೆ. ಒಂದು ಘನದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅತ್ತಳ ಅಂಚುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$P(x_1, y_1, z_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2, z_2)$ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. PQ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷಗಳ ಧನ ದಿಶೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು α, β, γ ಆಗಿರಲಿ. PL, QM ನ್ನು Ox ಮೇಲೆ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು. ಆಗ $LM = x_2 - x_1$. ಆದರೆ LM ಖಂಡ Ox ಮೇಲೆ PQ ವಿನ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$LM = x_2 - x_1 = PQ\cos\alpha$$

ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ

$$y_2 - y_1 = PQ\cos\beta$$

$$z_2 - z_1 = PQ\cos\gamma$$

$\therefore\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = PQ^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$. ಆದರೆ $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = PQ^2$

$$\therefore\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ಗಳನ್ನು (ಅಂದರೆ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳ ಧನದಿಶೆಗಳೊಡನೆ PQ ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳ ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳು ಅಥವಾ ಕೊಸೈನುಗಳು) PQ ವಿನ ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ ಈ ಮೇಲೆ ಬರೆದಂತಿದೆ.

ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪಲವು ವೇಳೆ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳು (l, m, n)ಗೆ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಿದೆ. ಅಂದರೆ, $\cos\alpha \propto l$, $\cos\beta \propto m$, $\cos\gamma \propto n$. ಈ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

ಈಗ $\cos\alpha = lk, \cos\beta = mk, \cos\gamma = nk$

$$\therefore\ k^2(l^2 + m^2 + n^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\therefore\ k = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

ಇಲ್ಲಿ ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಂಪ್ರದಾಯ. ಹೀಗೆ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದಾಗ ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಬಹುದು.

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{QP}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ PQ ವಿನ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ಆಗುವುವು.

Note 1 The direction cosines of the axes are (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

2 If P is a point on a line passing through the origin and (l, m, n) be its direction cosines then the coordinates of P are (lr, mr, nr) where OP $= r$.

4.8 Angle between two given straight lines. Let θ be the angle between two straight lines whose direction cosines are (l, m, n) and (l', m', n'). Draw OP and OQ parallel to these lines through the origin and choose P and Q such that OP = OQ = 1. Then $\angle$POQ $= \theta$ and P is (l, m, n) and Q is (l', m', n').

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ.\cos\theta$$

$$\therefore\ (l-l')^2 + (m-m')^2 + (n-n')^2 = 1+1-2.1.1.\cos\theta$$

$$\therefore\ 2\cos\theta = 2 - [l^2 + m^2 + n^2 + l'^2 + m'^2 + n'^2 - 2ll' - 2mm' - 2nn']$$

$$= 2 - 2 + 2(ll' + mm' + nn')$$

$$\therefore \cos\theta = ll' + mm' + nn'$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - (ll' + mm' + nn')^2}$$

$$= \sqrt{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2) - (ll'+mm'+nn')^2}$$

$$= \sqrt{(mn'-m'n)^2 + (nl'-n'l)^2 + (lm'-l'm)^2}$$

If the two lines are at right angles to one another $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. In this case $ll' + mm' + nn' = 0$. When the two straight lines are parallel $\theta = 0$. In this case

$$mn' - m'n = nl' - n'l = lm' - l'm = 0$$

$$\text{or}\quad \frac{l}{m} = \frac{l'}{m'},\quad \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'},\quad \frac{n}{l} = \frac{n'}{l'}$$

$$\text{or}\quad \frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$$

ಸೂಚನೆ 1 ಅಕ್ಷಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳು (1, 0, 0), (0, 1 0) (0, 0, 1).

2 P ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದು (l, m, n) ಆ ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳಾದರೆ P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (lr, mr, nr). ಇಲ್ಲಿ $OP = r$.

೪.೮ ಎರಡು ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ

(l, m, n) ಮತ್ತು (l', m', n') ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಆಗಿರಲಿ. OP ಮತ್ತು OQ ಗಳನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಈ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು. $OP = OQ = 1$ ಎಂದು ಆರಿಸಬೇಕು. ಆಗ $LPOQ = \theta$ ಮತ್ತು P, Q ಬಿಂದುಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ (l, m, n), (l', m', n').

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\, OP.OQ.\cos\,\theta$$

$$\therefore\quad (l-l')^2 + (m-m')^2 + (n-n')^2 = 1 + 1 - 2\cdot 1\cdot 1.\cos\,\theta$$

$$\therefore\quad 2\cos\theta = 2 - [l^2 + m^2 + n^2 + l'^2 + m'^2 + n'^2 - 2l\,l' - 2mm' - 2\,nn']$$

$$= 2 - 2 + 2(ll' + mn' + nn')$$

$$\therefore\quad \cos\,\theta = ll' + mm' + nn'$$

$$\therefore\quad \sin\,\theta = \sqrt{1 - (ll' + mm' + nn')^2}$$

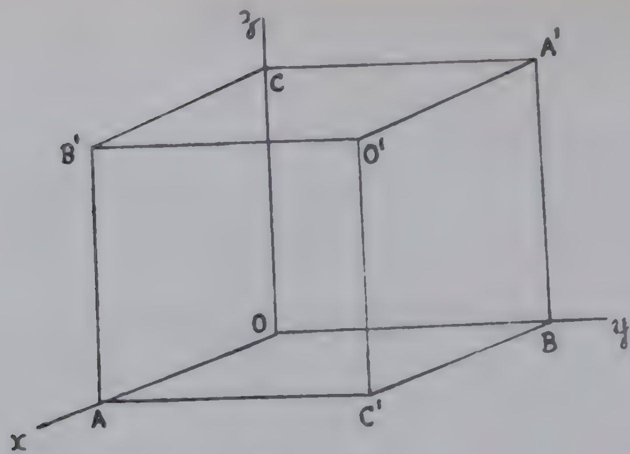
$$= \sqrt{(l'^2 + m^2 + n^2)\ (l'^2 + m'^2 + n'^2) - (ll' + mm' + nn')^2}$$

$$= \sqrt{(mn' - m'n)^2 + (nl' - n'l)^2 + (lm' - l'm)^2}$$

ಇವೆರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ $\theta = \frac{\pi}{2}$. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $ll' + mm' + nn' = 0$. ಇವೆರಡು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ $\theta = 0$. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $mn' - m'n = nl' - n'l = lm' - l'm = 0$

ಅಥವಾ $\frac{l}{m} = \frac{l'}{m'}$, $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, $\frac{n}{l} = \frac{n'}{l'}$

ಅಥವಾ $\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$



Examples

1 A line makes angles α, β, γ, δ with the four diagonals of a cube. Show that $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{3}{4}$.

Choose a set of three mutually perpendicular and concurrent edges as the axes of coordinates. If the length of each edge be unity then we have O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1), A′ (0, 1, 1), B′ (1, 0, 1), C′ (1, 1, 0), O′ (1, 1, 1). The direction cosines of the diagonals are

$$OO' \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad AA' \equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$BB' \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad CC' \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

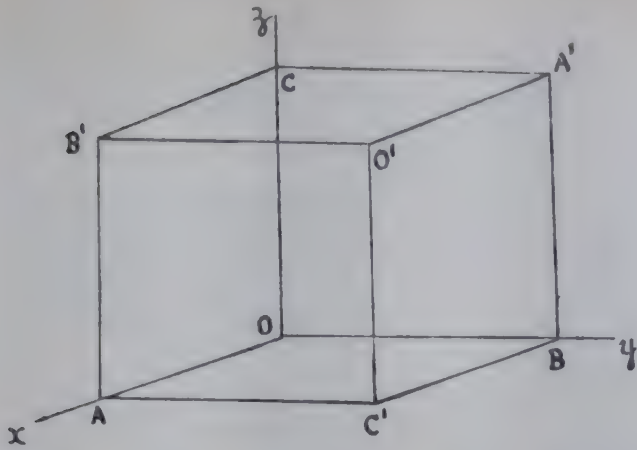
If (l, m, n) be the direction cosines of the given line

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m + n), \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(-l + m + n),$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}(l - m + n), \quad \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m - n)$$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{1}{3}[4(l^2 + m^2 + n^2)]$$

$$= \frac{4}{3}$$



ಉದಾಹರಣೆಗಳು 1 ಒಂದು ಘನದ ನಾಲ್ಕು ಕರ್ಣಗಳೊಡನೆ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿರುವ ಮೂರು ಅಂಚುಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದ 1 ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ಘನದ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ :

$O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $A'(0, 1, 1)$ $B'(1, 0, 1)$, $C'(1, 1, 0)$, $O'(1, 1, 1)$. ಕರ್ಣಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳ ಬೆಲೆ :

$$OO' \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad AA' \equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$BB' \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad CC' \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

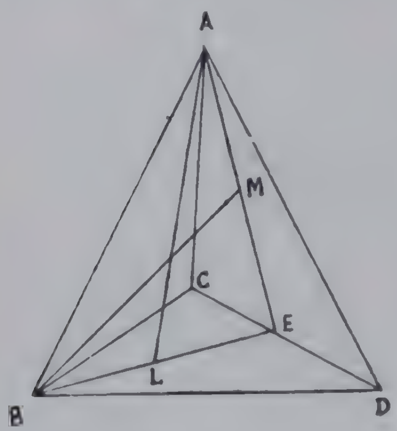
ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳು (l, m, n) ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} (l+m+n), \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} (-l+m+n),$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} (l-m+n), \quad \cos \delta = \frac{1}{\sqrt{3}} (l+m-n)$$

$$\therefore \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{1}{3} . 4 (l^2+m^2+n^2) = \frac{4}{3}$$

2 Two pairs of opposite edges of a tetrahedron are at right angles. Show that the third pair also contains a right angle. Prove further that the sums of the squares of the opposite edges are the same.



Choose C as the origin, CB as the x-axis and the plane CBD as the z-plane. Then C is $(0, 0, 0)$, ; B is $(a, 0, 0)$, D is $(b, c, 0)$ and A is (x, y, z). Let AC, BD and AD, BC contain each a right angle. We have to show AB, CD also contain a right angle.

Direction ratios of AC are $(-x, -y, -z)$; BD are $(b-a, c, 0)$; AD are $(b-x, c-y, -z)$; BC are $(-a, 0, 0)$; AB are $(a-x, -y, -z)$; CD are $(b, c, 0)$.

$$\therefore \quad x(b-a)+yc=0$$

$$a(b-x) \quad =0 \qquad \ldots(1)$$

To show $\quad b(a-x)-cy=0$

Subtracting $\quad (xb-xa+yc)-(ab-ax)=0$

$$\therefore \quad b(x-a)+cy=0$$

$$\therefore \quad b(a-x)-cy=0$$

To prove further that

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$

$$AB^2=(x-a)^2+y^2+z^2$$

$$CD^2=b^2+c^2$$

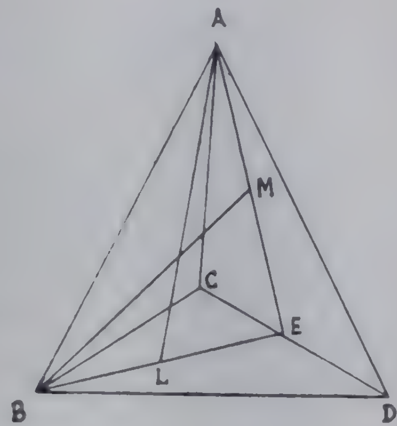
$$AC^2=x^2+y^2+z^2$$

$$BD^2=(a-b)^2+c^2$$

$$\therefore \quad AB^2+CD^2=x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-2ax$$

$$AC^2+BD^2=x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-2ab$$

2. ಒಂದು ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಎರಡು ಜೊತೆ ಎದುರು ಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಮೂರನೆಯ ಜೊತೆಯೂ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



C ಯನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ, CBಯನ್ನು x- ಅಕ್ಷವಾಗಿ ಮತ್ತು ಸಮತಲ CED ಯನ್ನು z- ಸಮತಲವಾಗಿಯೂ ಆರಿಸ ಬೇಕು. ಆಗ C (0, 0, 0) ; B $(a, 0, 0)$, D $(b, c, 0)$, A(x, y, z). AC, BD ಮತ್ತು AD, BC ಜೊತೆಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಲಿ. AB, CD ಗಳೂ ಲಂಬ ಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸ ಬೇಕು.

ACಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು $(-x, -y, -z)$; BDಯುವು $(b-a, c, 0)$ ADಯುವು $(b-x, c-y, -z)$; BCಯುವು $(-a, 0, 0)$; ABಯುವು $(a-x, -y, -z)$; CDಯುವು $(b, c, 0)$.

$$\therefore \quad x(b-a)+yc=0$$

ಮತ್ತು $a(b-x) \quad =0$ ...(1)

$b(a-x)-cy=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಕಳೆದರೆ $(xb-xa+yc)-(ab-ax)=0$

$$\therefore \quad b(x-a)+cy=0$$

$$\therefore \quad b(a-x)-cy=0$$

$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

$$AB^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2$$
$$CD^2 = b^2 + c^2$$
$$AC^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$BD^2 = (a-b)^2 + c^2$$

$$\therefore \quad AB^2 + CD^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2ax$$
$$AC^2 + BD^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab$$

Result (1) shows that $x = b$. Hence $AB^2+CD^2 = AC^2+BD^2$. Similarly, we can show that each sum is equal to AD^2+BC^2.

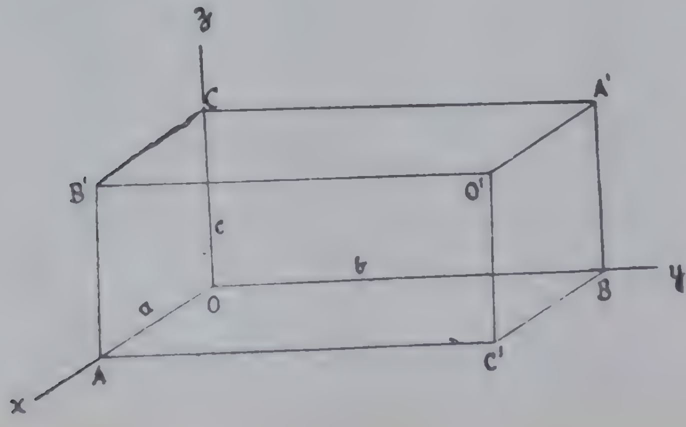
3 In the above example show that the normals from the vertices to the opposite faces are concurrent.

Draw AL normal to plane BCD and AE perpendicular to CD. Now CD is perpendicular to AB (given). Since AL is perpendicular to the plane on which CD lies, CD and AL contain a right angle. Finally by construction CD and AE contain a right angle. Thus to the three concurrent lines AB, AL, AE the same line CD is a normal. Hence ABLEA is a plane. The normal from A to the plane BCD lies on the plane ABE. Further CD is perpendicular to BE. Similarly, the normal from B to the plane ACD lies in the plane ABE. Therefore the normals from A and B on the opposite faces intersect. Similarly, the normals from any two vertices on the opposite faces intersect. Hence all the four normals intersect in the same point (O, say).

A tetrahedron having these properties therefore has an orthocentre and is hence called an *orthocentric* tetrahedron.

4 The edges of a rectangular parallelpiped are a, b, c. Prove that the angles between the four diagonals are

$$\cos^{-1}\left[\frac{\pm a^2 \pm b^2 \pm c^2}{a^2+b^2+c^2}\right].$$



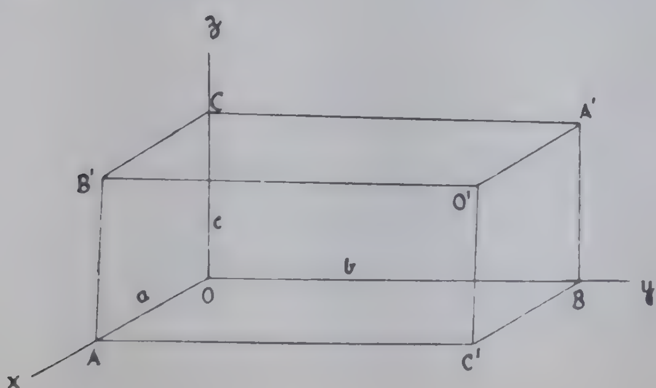
ಫಲಿತಾಂಶ (1)ರ ಪ್ರಕಾರ $x = b$. ಆದ್ದರಿಂದ $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. ಇದೇ ರೀತಿ ಈ ಒಂದೊಂದು ಮೊತ್ತವೂ $AD^2 + BC^2$ ಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

3 ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಎದುರು ಫಲಕಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ALನ್ನು BCD ಸಮತಲಕ್ಕೂ AEಯನ್ನು CDಗೂ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು. CDಯು ABಗೆ ಲಂಬ (ದತ್ತ). CD ಇರುವ ಸಮತಲಕ್ಕೆ AL ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ CD ಮತ್ತು AL ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಕೊನೆಯದಾಗಿ CD ಮತ್ತು AE (ರಚನೆಯಿಂದ) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ. ಹೀಗೆ ಮೂರು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ ರೇಖೆಗಳಾದ AB, AL, AE ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆ CD ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ABLEA ಒಂದು ಸಮತಲ. A ಯಿಂದ BCD ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ABE ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, CDಯು BEಗೆ ಲಂಬ. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ Bಯಿಂದ ACD ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ABE ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A ಮತ್ತು Bಗಳಿಂದ ಎದುರು ಫಲಕಗಳ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಎದುರು ಫಲಕಗಳ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲ ಲಂಬಗಳೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ (ಅದು O ಎಂದಿರಲಿ) ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ವಿಶೇಷಗುಣವಿರುವ ಚತುಷ್ಫಲಕಕ್ಕೆ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರೀಯ ಚತುಷ್ಫಲಕ ಎಂದು ಇದರ ಹೆಸರು.

4 ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಸಮಾಂತರ ಷಟ್ಫಲಕದ ಅಂಚುಗಳ ಉದ್ದ a, b, c, ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಕರ್ಣಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನಗಳು $\cos^{-1}\left[\dfrac{\pm a^2 \pm b^2 \pm c^2}{a^2+b^2+c^2}\right]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



Choosing a set of mutually perpendicular and concurrent edges as the axes of coordinates we have the vertices to be O (0, 0, 0), A $(a, 0, 0)$, B $(0, b, 0)$. C $(0, 0, c)$, O′ (a, b, c), A′ $(0, b, c)$, B′ $(a, 0, c)$, C′ $(a, b, 0)$. The direction ratios of the diagonals are $OO' \equiv [a, b, c]$, $AA' \equiv [-a, b, c]$, $BB' \equiv [a, -b, c]$, $CC' \equiv [a, b, -c]$.

∴ Angle between OO′ and BB′ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

" " OO′ and CC′ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

" " OO′ and AA′ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

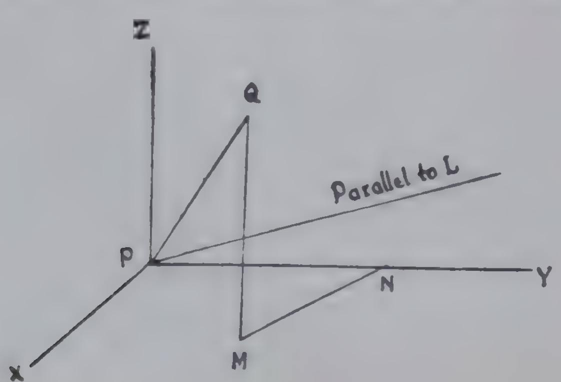
" " AA′ and BB′ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{-a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

" " AA′ and CC′ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

" " BB′ ane CC′ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

The angles are therefore $\cos^{-1}\left[\dfrac{\pm a^2 \pm b^2 \pm c^2}{a^2+b^2+c^2}\right]$.

4.9 Projection of a segment on a given line. Let P (x_1, y_1, z_1) and Q (x_2, y_2, z_2) be two given points and L the given line whose direction cosines are (l, m, n). We have to find the projection of the segment PQ on L. Give a parallel transformation to the coordinate axes by which P becomes



ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ ಅಂಚುಗಳ ಒಂದು ಗಣವನು ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕು. ಆಗ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು O (0,0,0) A $(a, 0, 0)$, B $(0, b, 0)$, C $(0, 0, c)$, O′ (a, b, c), A′ $(0, b, c)$ B′ $(a, 0, c)$, C′ $(a, b, 0)$. ಕರ್ಣಗಳ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು $OO' \equiv (a, b, c)$, $AA' \equiv (-a, b, c)$, $BB' \equiv (a, -b, c)$, $CC' \equiv (a, b, -c)$

∴ OO′ ಮತ್ತು BB′ ನಡುವಿನ ಕೋನ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$

OO′ ಮತ್ತು CC′ ನಡುವಿನ ಕೋನ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$

OO′ ಮತ್ತು AA′ ನಡುವಿನ ಕೋನ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$

AA′ ಮತ್ತು BB′ ನಡುವಿನ ಕೋನ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{-a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$

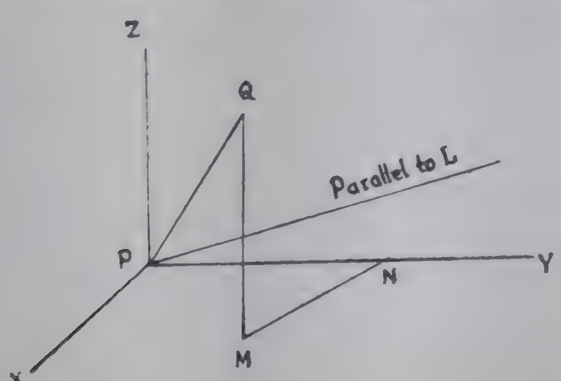
AA′ ಮತ್ತು CC′ ನಡುವಿನ ಕೋನ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{-a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$

BB′ ಮತ್ತು CC′ ನಡುವಿನ ಕೋನ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಕೋನಗಳು $\cos^{-1}\left(\dfrac{\pm a^2 \pm b^2 \pm c^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$

೪.೯ ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ಪ್ರಕ್ಷೇಪ

P (x_1, y_1, z_1) ಮತ್ತು Q (x_2, y_2, z_2) [ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿಸಲಿ]. ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆ Lನ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (l, m, n) ಆಗಿರಲಿ. L ಮೇಲೆ PQ ಖಂಡದ ಪ್ರಕ್ಷೇಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ಪರಿವರ್ತನೆ

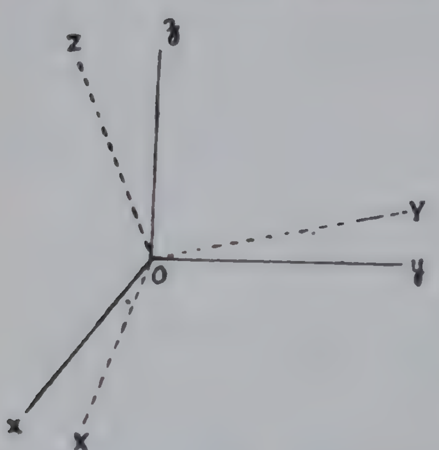


the new origin. In the new system the coordinates of Q are $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Draw a line through P parallel to L. Its direction cosines are (l, m, n). The projection of PQ on L is equal to the projection of PQ on this parallel line. The projection of PQ is equal to the algebraic sum of the projections of the broken line PNMQ = PN $\cos \beta$ + NM $\times \cos \alpha$ + MQ $\cos \gamma$, where α, β, γ are the angles made by L (or its parallel) with the positive directions of the axes.

$\therefore \quad \cos \alpha = l, \cos \beta = m, \cos \gamma = n.$

$\therefore$ Projection of PQ on L $= (x_2 - x_1)\, l + (y_2 - y_1)\, m$
$+ z_2 - z_1)\, n$

4.10 Relations between the direction cosines of three mutually perpendicular lines



Let $Oxyz$ be the coordinate system. Let OXYZ be any mutually perpendicular lines through O. Let the direction cosines of OX, OY, OZ with reference to the coordinate system $Oxyz$ be (l_r, m_r, n_r), $r = 1, 2, 3$.

$$\therefore \quad \begin{aligned} l_1 &= \cos XOx, & m_1 &= \cos XOy, & n_1 &= \cos XOz \\ l_2 &= \cos YOx, & m_2 &= \cos YOy, & n_2 &= \cos YOz \\ l_3 &= \cos ZOx, & m_3 &= \cos ZOy, & n_3 &= \cos ZOz \end{aligned}$$

Now
$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1 \qquad \text{(A)} \end{aligned}$$

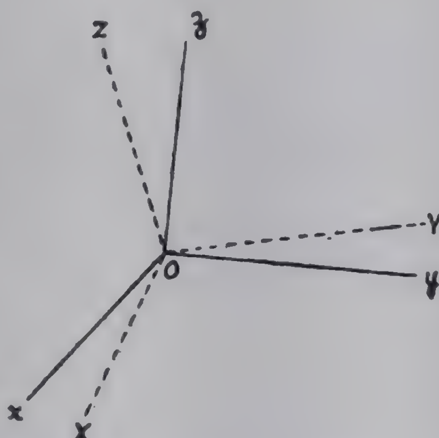
$$\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0 \\ l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 &= 0 \qquad \text{(B)} \end{aligned}$$

ನೀಡಿ P ಬಿಂದು ಹೊಸ ಮೂಲಬಿಂದು ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ನೂತನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ Qವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Pಯ ಮೂಲಕ Lಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆ ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇದರ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (l, m, n). L ಮೇಲೆ PQವಿನ ವಿಕ್ಷೇಪ ಈ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ PQವಿನ ವಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ ಸಮ. PQವಿನ ವಿಕ್ಷೇಪ PNMQ ಎಂಬ ತುಂಡಾದ ರೇಖೆಯ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ$=PN\cos\beta+NM\cos\alpha+MQ\cos\gamma$. ಇಲ್ಲಿ α, β, γಗಳು L (ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆ) ಅಕ್ಷಗಳ ಧನ ದಿಶೆಗಳೊಡನೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು.

$$\therefore \quad \cos\alpha = l, \cos\beta = m, \cos\gamma = n.$$

$\therefore$ L ಮೇಲೆ PQವಿನ ವಿಕ್ಷೇಪ $= (x_2-x_1)\,l + (y_2-y_1)\,m + (z_2-z_1)\,n$

೪.೧೦ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು



$Oxyz$ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಆಗಿರಲಿ. OXYZ, O ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. $Oxyz$ ನ್ನು ಕುರಿತು OX, OY, OZಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (l_r, m_r, n_r), $y=1, 2, 3$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad l_1 = \cos XOx,\ m_1 = \cos XOy,\ n_1 = \cos XOz$$
$$l_2 = \cos YOx,\ m_2 = \cos YOy,\ n_2 = \cos YOz$$
$$l_3 = \cos ZOx,\ m_3 = \cos ZOy,\ n_3 = \cos ZOz$$

ಈಗ

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 &= 0 \\ l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 &= 0 \\ l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

If we now choose OXYZ as the coordinate system we have the direction cosines of Ox to be $\cos xOX = l_1$, $\cos xOY = l_2$, $\cos xOZ = l_3$. Similarly, the direction cosines of Oy are (m_1, m_2, m_3) and Oz are (n_1, n_2, n_3). Therefore

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^3 &= 1 \qquad \text{(C)} \\ l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 &= 0 \\ m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 &= 0 \\ n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3 &= 0 \qquad \text{(D)} \end{aligned}$$

Equation sets A, B, C, D give the desired result.

Consider the 1st and 3rd equations in B.

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$
$$l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_3 = 0$$

Solving between them we have

$$\frac{l_1}{m_2n_3 - m_3n_2} = \frac{m_1}{n_2l_3 - n_3l_2} = \frac{n_1}{l_2m_3 - l_3m_2} = \frac{\pm\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}{\sum (m_2n_3 - m_3n_2)^2}$$

$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)(l_3^2 + m_3^2 + n_3^2) - (l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3)}}$$

see § 4.8

$$= \pm 1$$

$$\therefore \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \sum l_1 (m_2n_3 - m_3n_2) = \pm 1$$

The summary of the foregoing calculations can be stated in a tabular form as follows :

	Ox	Oy	Oz
OX	l_1	m_1	n_1
OY	l_2	m_2	n_2
OZ	l_3	m_3	n_3

ಈಗ OXYZನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ, Oxನ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು $\cos xOX = l_1$, $\cos xOY = l_2$, $\cos xOZ = l_3$. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ Oy, Ozಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (m_1, m_2, m_3) ಮತ್ತು (n_1, n_2, n_3).

$$\therefore \quad \begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

$$\begin{aligned} l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 &= 0 \\ m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 &= 0 \\ n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

A, B, C, D ಸಮೀಕರಣಗಣಗಳು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು. Bಯಲ್ಲಿನ 1ನೆಯ ಮತ್ತು 3ನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

$$\begin{aligned} l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 &= 0 \\ l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_3 &= 0 \end{aligned}$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$\frac{l_1}{m_2n_3 - m_3n_2} = \frac{m_1}{n_2l_3 - n_3l_2} = \frac{n_1}{l_2m_3 - l_3m_2} = \frac{\pm\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}{\sum (m_2n_3 - m_3n_2)^2}$$

$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)\ (l_3^2 + m_3^2 + n_3^2) - (l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3)}}$$

(§ 4.8 ನೋಡಿ)

$$= \pm 1$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \sum l_1 (m_2n_3 - m_3n_2) = \pm 1$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು :

	Ox	Oy	Oz
OX	l_1	m_1	n_1
OY	l_2	m_2	n_2
OZ	l_3	m_3	n_3

The direction cosines of OX with reference to $Oxyz$ are obtained from the row pertaining to OX. They are (l_1, m_1, n_1). The direction cosines of Oz with reference to OXYZ are obtained from the column pertaining to Oz. They are (n_1, n_2, n_3).

Exercises 4.1

1 Prove that the centroid of a solid tetrahedron is

$$\left[\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right]$$

where (x_r, y_r, z_r), $r = 1, 2, 3, 4$ are the vertices of the tetrahedron.

2 Show that the points $(5,-1, 1)$, $(7, -4, 7)$, $(1, -6, 10)$, $(-1,-3, 4)$ enclose a rhombus.

3 Prove that A $(3, 2,-4)$, B $(5, 4, -6)$, C $(9, 8, -10)$ are collinear. Find the ratio in which C divides AB.

4 A straight line makes angles α, β, γ with the positive directions of the axes. Prove that

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

5

$$al+bm+cn=0 \quad \text{and}$$

$$fmn+gnl+hlm=0$$

connect the direction cosines of two given straight lines. Show that the conditions for their perpendicularity and parallelism are respectively

$$\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}=0 \quad \text{and}$$

$$a^2f^2+b^2g^2+c^2h^2-2\,bcgh-2\,cahf-2\,abfg = 0$$

6 The direction cosines of three mutually perpendicular straight lines are (l_r, m_r, n_r), $r = 1, 2, 3$. Show that the direction cosines of a line whose direction ratios are $(l_1 + l_2 + l_3, m_1 + m_2 + m_3, n_1 + n_2 + n_3)$ are $\left(\frac{l_1+l_2+l_3}{\sqrt{3}}, \frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{3}}, \frac{n_1+n_2+n_3}{\sqrt{3}}\right)$. Show further that this line is equally inclined to the given lines.

Oxyನ್ನು ಕುರಿತು OXನ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು OXಅಡ್ಡ ಸಾಲು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಅವು (l_1, m_1, n_1). $OXYZ$ನ್ನು ಕುರಿತು Ozನ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು Oz ನೀಟ ಸಾಲು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಅವು (n_1, n_2, n_3).

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು 4.1

1 (x_r, y_r, z_r), $r = 1, 2, 3, 4$ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ

$$\left[\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right]$$

2 $(5,-1, 1)$, $(7,-4, 7)$, $(1,-6, 10)$, $(-1,-3, 4)$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3 A $(3, 2, -4)$, B $(5, 4, -6)$, C $(9, 8, -10)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ABಯನ್ನು C ವಿಭಜಿಸುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4 ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಅಕ್ಷಗಳ ಧನದಿಶೆಗಳೊಡನೆ α, β, γ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5 ಎರಡು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳನ್ನು $al+bm+cn=0$ ಮತ್ತು $fmn + gnl + hlm = 0$ ಸಂಬಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಅವು ಲಂಬವಾಗಿರಲು ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಲು ನಿಯಮಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$ ಮತ್ತು $a^2 f^2 + b^2 g^2 + c^2 h^2 - 2\,bcgh - 2\,cahf - 2\,abfg = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6 ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (l_r, m_r, n_r), $r = 1, 2, 3$. $(l_1+l_2+l_3, m_1+m_2+m_3, n_1+n_2+n_3)$ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು $\left(\frac{l_1+l_2+l_3}{\sqrt{3}}, \frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{3}}, \frac{n_1+n_2+n_3}{\sqrt{3}}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಈ ಸರಳರೇಖೆ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿದೆಯೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

7 Show that the angle between two diagonals of a cube is $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

8 The projections of a line on the coordinate axes are 3, 4, 12. Show that the length of the line is 13 and that its direction ratios are (3, 4, 12).

9 Show that the area of the triangle formed by the points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) and the origin is

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}$$

7 ಒಂದು ಘನದ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8 ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳು 3, 4, 12. ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಉದ್ದ 13 ಎಂದೂ ಅದರ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು (3, 4, 12) ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

9 ಮೂಲಬಿಂದು, (x_1, y_1, z_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2, z_2) ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $\frac{1}{2}\sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

CHAPTER 5

THE PLANE

5.1 Equation to a locus. The path traced out by a moving point under given conditions is called the locus of the point. It is therefore imperative that every point on the locus must satisfy the given conditions. As in two-dimensional geometry we denote a typical point on the locus as P (x_1, y_1, z_1) and obtain one or more relationships between these coordinates by the application of the given conditions. In this equation (or equations) that connects (or connect) x_1, y_1, z_1 we replace these letters by x, y, z and call the resulting equation (or equations) as the equation (or equations) to the locus.

Thus the equation to a locus is a certain relationship between x, y, z. The equation is satisfied by the coordinates of every point on the locus ; moreover no point that is not lying on it will satisfy it.

$f(x, y, z) = 0$ is an equation to a locus. By calculating the value-triads for x, y, z that satisfy this equation points on the locus can be plotted and hence the curve drawn.

5.2 The equation to a plane. The equation to a plane is derived by making use of postulate 7 (Chapter 3). Let the normal from the origin O to the plane meet it at N. Let P(x, y, z) be any point on the plane. Then NP and ON contain a right angle. If the direction cosines of ON are $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ and ON$=p$ then the coordinates

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ಸಮತಲ

೫.೧ ಪಥ ಸಮೀಕರಣ

ದತ್ತ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದು ರೇಖಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಬಿಂದು ಪಥ ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ ಪಥ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಥದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವೂ ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು. ಸಮತಲ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ದಲ್ಲಿ ಅನುಸರಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ: ಪಥದ ಮೇಲಣ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು $P(x_1, y_1, z_1)$ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ನಡುವೆ ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಡೆ ಯುತ್ತೇವೆ; x_1, y_1, z_1 ಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸುವ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ (ಅಥವಾ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ) x_1, y_1, z_1 ಗಳ ಬದಲು x, y, z ಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ದೊರೆಯುವ ಸಮೀಕರಣ (ಅಥವಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು) ಪಥದ ಸಮೀಕರಣ (ಅಥವಾ ಸಮೀಕರಣಗಳು).

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದರೆ x, y, z ಗಳ ನಡುವಣ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ. ಪಥದ ಮೇಲಣ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೂ ಸಮೀಕಣವನ್ನು ತಾಳಿ ಮಾಡುತ್ತವೆ; ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಪಥದ ಮೇಲಿರದ ಯಾವ ಬಿಂದುವೂ ಸಮೀಕರಣ ವನ್ನು ತಾಳಿ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ.

$f(x, y, z)=0$ ಒಂದು ಪಥ ಸಮೀಕರಣ. ಇದನ್ನು ತಾಳಿಮಾಡುವಂಥ x, y, z ಗಳ ಬೆಲೆ ತ್ರಯಗಳನ್ನು ಗಣಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಪಥವನ್ನು ಗುರುತಿಸ ಬಹುದು ಮತ್ತು ತತ್ಸಂಬಂಧ ರೇಖೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು.

೫.೨ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ

ಅಧ್ಯಾಯ 3, ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆ 7ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೂಲಬಿಂದು O ದಿಂದ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದ N ಆಗಿರಲಿ. $P(x, y, z)$ ಸಮತಲದ ಮೇಲಣ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ NP ಮತ್ತು ONಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\frac{\pi}{2}$. ONನ ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳು $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ಮತ್ತು $ON=p$ ಆದರೆ Nನ ನಿರ್ದೇಶಕ

of N are $(p \cos \alpha, p \cos \beta, p \cos \gamma)$. The direction ratios of N are $(x - p \cos \alpha, y - p \cos \beta, z - p \cos \gamma)$. Since $\angle \text{PNO} = \frac{\pi}{2}$ we have $\cos \alpha (x - p \cos \alpha) + \cos \beta (y - p \cos \beta) + \cos \gamma (z - p \cos \gamma) = 0$.

$$\therefore \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$
$$= p \qquad \dots (5.1)$$

This is an equation of the first degree in (x, y, z). Consider the general equation of the first degree in x, y, z, namely $ax + by + cz + d = 0$. Dividing throughout by $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ we have $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} z + \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$. We can choose α, β, γ such that

$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,

$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. It is clear that $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. The equation now becomes $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Comparing this with equation (5.1) we conclude that $ax + by + cz + d = 0$ represents a plane.

Note : 1 $x = 0$ is the plane in which the x-coordinates of all points are zero. Hence $x = 0$ is the x- or yz-plane. Similarly $y = 0$ and $z = 0$ are respectively the y-and z-planes.

2 By postulate 8 (Chapter 3) two planes intersect along a straight line. Hence $y = 0, z = 0$ together determine the x-axis. Similarly $z = 0, x = 0$ are the equations of the y-axis; and $x = 0, y = 0$ represent the z-axis.

ಗಳು $(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$ ಆಗುವುವು. NPಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು $(x-p\cos\alpha, y-p\cos\beta, z-p\cos\gamma)$. $\angle PNO = \frac{\pi}{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\cos\alpha\ (x-p\cos\alpha) + \cos\beta\ (y-p\cos\beta) +$

$$\cos\gamma\,(z-p\cos\gamma) = 0$$

$$\therefore\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = p \qquad \ldots(5\cdot1)$$

ಇದು (x, y, z) ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ. ಈಗ x, y, z ಚರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಅದು $ax+by+cz+d=0$. ಇದನ್ನು $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,z$$

$$+ \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0;$$ $\alpha\ \beta\ \gamma$ ಗಳನ್ನು $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಆರಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಸಮೀಕರಣದ ಈಗಿನ ರೂಪ

$$x\cos\beta + y\cos\beta + z\cos\gamma = \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

ಇದನ್ನು (5.1) ಸಮೀಕರಣದೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿ. $ax+by+cz+d=0$. ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ : 1 $x=0$ ಎಂಬ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ $x-$ ನಿರ್ದೇಶಕ ಸೊನ್ನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x=0$ ಯು $x-$ ಅಥವಾ $yz-$ಸಮತಲ. ಅದೇ ರೀತಿ $y=0$ ಯು $y-$ ಮತ್ತು $z=0$ ಯು $z-$ಸಮತಲಗಳು.

2 ಅಧ್ಯಾಯ 3, ಸ್ವೀಕೃತಭಾವನೆ 8 ರಿಂದ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $y=0$, $z=0$ ಇವೆರಡೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ $x-$ಅಕ್ಷವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಅದೇ ರೀತಿ $z=0$, $x=0$ ಗಳು $y-$ಅಕ್ಷವನ್ನೂ $x=0$, $y=0$ ಗಳು $z-$ಅಕ್ಷವನ್ನೂ ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ.

3 The intersections of the plane $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$ with the coordinate axes are got by solving between the corresponding equations. They are $(p \sec \alpha, 0, 0)$ $(0, p \sec \beta, 0)$, $(0, 0, p \sec \gamma)$.

4 In the form $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$ we note that $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ are the direction cosines to the normal to the plane; and p is the length of the perpendicular from the origin to the plane. Now comparing $ax + by + cz + d = 0$ with the above equation we get

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta} = \frac{c}{\cos \gamma} = = \frac{+\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{1}.$$

Therefore the direction cosines of the normal to $ax+by+cz+d = 0$ are $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$.

The direction ratios are (a, b, c) which are the coefficients of x, y, z. The length of the perpendicular from the origin is $\frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

5 To find the length of the perpendicular from a given point P (x_1, y_1, z_1) to the plane $ax + by + cz + d = 0$. We give a parallel transformation to the coordinate system by which the origin is shifted to P. If the new current coordinates are X, Y, Z the equations of transformation are $x = x_1 + X$, $y = y_1 + Y$, $z = z_1 + Z$. The transformed equation to the plane is $aX + bY + cZ + ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. The length of the perpendicular from P (the present origin) to this plane is $\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

5.3 Different forms of the equation to a plane

(a) Plane through three given points. Let the three given points be P (x_1, y_1, z_1), Q (x_2, y_2, z_2), R (x_3, y_3, z_3). Let the plane passing through them be $ax + by + cz + d=0$.

3 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ ಮತ್ತು ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನಗಳನ್ನು ಆಯಾ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು $(p\sec\alpha, 0, 0)$, $(0, p\sec\beta, 0)$, $(0, 0, p\sec\gamma)$.

4 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ಗಳು ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು ಮತ್ತು p ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು. $ax + by + cz + d = 0$ ಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma} = \frac{-d}{p}$$

$$= +\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{1}.$$ ಆದ್ದರಿಂದ $ax + by + cz + d = 0$ ಸಮತಲದ ಲಂಬದ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು (a, b, c). ಇವು x, y, z ಗಳ ಗುಣಾಂಕಗಳು. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ $-\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

5 $P(x_1, y_1, z_1)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $ax+by+cz+d=0$. ಸಮತಲದ ಮೇಲೆಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಸರಳ ಪರಿವರ್ತನೆ ನೀಡುತ್ತೇವೆ; ಇದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದು O, P ಗೆ ಸಾಗುವಂತೆ ವಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೊಸ ವಿನಿಮಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು X, Y, Z, ಆದರೆ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x = x_1 + X$, $y = y_1 + Y$, $z = z_1 + Z$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತಲದ ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮೀಕರಣ $aX + bY + cZ + ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. P ಯಿಂದ (ಈಗಿನ ಮೂಲಬಿಂದು) ಇದರ ಮೇಲೆಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ

$$\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

೫.೩ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣದ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳು

(a) ಮೂರು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸಮತಲ. ಆ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ ಆಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸಮತಲ $ax+by+cz+d=0$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\begin{aligned} \therefore \quad ax + by + cz + d &= 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d &= 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d &= 0 \end{aligned}$$

Eliminating a, b, c, d we have the required equation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} 0 =$$

(b) Plane making given intercepts on the coordinate axes.

Let the intercepts made on the coordinate axes be a, b, c. Therefore $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ are points on the plane. The determinant form given in the previous case can be simplified and the result obtained. Alternatively, let $lx+my+nz+p=0$ be the plane. Then

$$la+p=mb+1=nc+p=0$$

$$\therefore \quad l = -\frac{p}{a}, \quad m = -\frac{p}{b}, \quad n = -\frac{p}{c}$$

$\therefore$ The equation to the plane is

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

5.4 Angle between two planes. The angle between two planes is the angle between the normals to them (§ 3.8). This angle is called the *dihedral angle.*

Let two given planes be

$$\begin{aligned} ax+by+cz+d&=0 \\ a'x+b'y+c'z+d&=0 \end{aligned}$$

The direction ratios of the normals to these planes (a, b, c) and (a', b', c'). Therefore θ, the angle between the planes, is given by

$$\cos\theta = \frac{\pm\,(aa' + bb' + cc')}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\,(a'^2+b'^2+c'^2)}}$$

The condition that the planes may be at right angles to each other is $aa'+bb'+cc'=0$. If the planes are parallel to each other the normals are also so.

$$\therefore \quad ax+by+cz+d = 0$$
$$ax_1+by_1+cz_1+d = 0$$
$$ax_2+by_2+cz_2+d = 0$$
$$ax_3+by_3+cz_3+d = 0$$

ಇವುಗಳಿಂದ a, b, c, d ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(b) ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ದತ್ತ ರೇಖಾಂತರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಸಮತಲ. ಆ ರೇಖಾಂತರಗಳು a, b, c ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಧಾರಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ಸರಳೀಕರಿಸಿ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ, $lx+my+nz+p=0$ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ

$$la+p=mb+p=nc+p=0$$

$\therefore$ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

೫.೪ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನಕೋನ

ಸಮತಲಗಳ ಲಂಬಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವೇ ಆ ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ (§ 3.8). ಈ ಕೋನದ ಹೆಸರು ಘನ ಕೋನ.

ಎರಡು ದತ್ತ ಸಮತಲಗಳು

$$ax+by+cz+d=0$$
$$a'x+b'y+c'z+d'=0 \quad \text{ಆಗಿರಲಿ.}$$

ಈ ಸಮತಲಗಳ ಲಂಬಗಳ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು (a, b, c), (a', b', c'). ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ದ ಬೆಲೆ

$$\cos\theta = \pm \frac{(aa' + bb' + cc')}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)}}$$

ಇವೆರಡು ಸಮತಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರಲು ನಿರ್ಬಂಧ

$$aa'+bb'+cc'=0.$$

ಎರಡು ಸಮತಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಾಗ ಅವುಗಳ ಲಂಬಗಳೂ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುವು.

Hence $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

5.5 Two planes. Let $ax+by+cz=0$ and $a'x+b'y+c'z=0$ be two given planes passing through the origin. Their combined equation is

$$(ax+by+cz)\,(a'x+b'y+c'z)=0$$

On expansion we see that this is a homogeneous equation of the second degree in x, y, z. The general form of such an equation is $ax^2+by^2+cz^2+2\,hxy+2\,fyz+2\,gzx=0$. If this equation can be factorised into two linear factors then it will represent a pair of planes through the origin. Treat the equation as a quadratic in x.

$ax^2+2\,(hy+gz)x+(by^2+cz^2+2\,fyz) = 0$. Its discriminant must be a perfect square.

$$\Delta=4\,[(hy+gz))^2-a\,(by^2+cz^2+2\,fyz)]$$
$$=4\,[(h^2-ab)\,y^2+2\,(gh-af)\,yz+(\,g^2-ac)z^2]$$

The condition for Δ to be a perfect square is

$$(gh-af\,)^2-(h^2-ab)\,(\,g^2-ac)=0$$
$$a\,(abc+2\,fgh-af^2-b\,g^2-ch^2)=0$$
$$a\neq 0$$

$\therefore$ The required condition is

$$abc+2\,fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

And, in this case, we can find the angle between the two planes as follows :

Let $lx+my+nz=0$ and $l'x+m'y+n'z=0$ be the separate equations to the planes. Then $ax^2+by^2+cz^2+2\,hxy+2\,fyz+2\,gzx\equiv(lx+my+nz)\,(l'x+m'y+n'z)$

$$\therefore \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

೫.೫ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳು

$ax+by+cz=0$ ಮತ್ತು $a'x+b'y+c'z=0$ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$$(ax+by+cz)(a'x+b'y+c'z)=0$$

ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ x, y, z ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಮಾನಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕರೂಪ

$$ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2fyz+2gzx=0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡು ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಆಗ ಇದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು xನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬೇಕು.

$$\therefore \quad ax^2+2x(hy+gz)+(by^2+cz^2+2fyz)=0$$

ಇದರ ಶೋಧಕ ಒಂದು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗವಾಗಬೇಕು.

$$\begin{aligned}\triangle &= 4[(hy+gz)^2 - a(by^2+cz^2+2fyz)]\\ &= 4[(h^2-ab)y^2+2(gh-af)yz+(g^2-ac)z^2]\end{aligned}$$

$\triangle$ ಶುದ್ಧ ವರ್ಗವಾಗಲು ನಿಯಮ

$$(gh-af)^2-(h^2-ba)(g^2-ac)=0$$

$$a(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2)=0$$

$$a \neq 0$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. $lx+my+nz=0$ ಮತ್ತು $l'x+m'y+n'z=0$ ಸಮತಲಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\begin{aligned}&ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy\\ \equiv\ &(lx+my+nz)(l'x+m'y+n'z)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{ll'}{a} = \frac{mm'}{b} = \frac{nn'}{c} = \frac{lm' + l'm}{2h} = \frac{mn' + m'n}{2f}$$

$$= \frac{nl' + n'l}{2g} = \lambda, \text{ say}$$

If θ be the acute angle between the planes we have

$$\cos\theta = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}}$$

Now, $(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)$

$$= (ll' + mm' + nn')^2 + (lm' + l'm)^2$$
$$+ (mn' + m'n)^2 + (nl' + n'l)^2$$
$$- 4(lml'm' + mnm'n' + nln'l')$$
$$= [(a+b+c)^2 + 4h^2 + 4f^2 + 4g^2 - 4ab - 4bc - 4ca]\lambda^2$$
$$= [a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca + 4(f^2 + g^2 + h^2)]\lambda^2$$

Also, $ll' + mm' + nn' = (a+b+c)\lambda$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{a+b+c}{[a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca + 4(f^2 + g^2 + h^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{2(f^2 + g^2 + h^2 - ab - bc - ca)^{\frac{1}{2}}}{a + b + c}$$

Therefore the condition for perpendicularity is $\cos\theta = 0$ or $a + b + c = 0$ and for parallelism is $\tan\theta = 0$ or $f^2 + g^2 + h^2 - bc - ca - ab = 0$.

5.6 Planes bisecting the angles between two given planes. Let the two given planes be

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

Then, since the length of the perpendiculars to these planes from points on the planes bisecting the angles between them are equal we have their equations to be

$$\frac{(ax + by + cz + d)^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm \frac{(a'x + b'y + c'z + d')^2}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\therefore \frac{ll'}{a} = \frac{mm'}{b} = \frac{nn'}{c} = \frac{lm' + lm'}{2h} = \frac{mn' + m'n}{2f}$$

$$= \frac{nl' + n'l}{2g} = \lambda, \text{ ಎಂದಿರಲಿ.}$$

ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘು ಕೋನ θ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\cos\theta = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)\quad(l'^2 + m'^2 + n'^2)}}$$

ಈಗ $(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)$

$$= (ll' + mm' + nn')^2 + (lm' + l'm)^2 + (mn' + m'n)^2$$
$$+ (nl' + n'l)^2 - 4(lml'm' + mnm'n' + nln'l')$$
$$= [(a+b+c)^2 + 4h^2 + 4f^2 + 4g^2 - 4ab - 4bc - 4ca]\ \lambda^2$$
$$= [a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca + 4(f^2 + g^2 + h^2)]\lambda^2$$

ಅಲ್ಲದೆ, $ll' + mm' + nn' = (a+b+c)\lambda$

$$\therefore \cos\theta = \frac{a + b + c}{[a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca + 4(f^2 + g^2 + h^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2(f^2 + g^2 + h^2 - ab - bc - ca)^{\frac{1}{2}}}{a + b + c}$$

ಲಂಬವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ $\cos\theta = 0$, ಅಂದರೆ $a + b + c = 0$. ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ $\tan\theta = 0$, ಅಂದರೆ

$$f^2 + g^2 + h^2 - bc - ca - ab = 0$$

೫.೬ ಎರಡು ದತ್ತ ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳನ್ನುಅರ್ಧಿಸುವ ಸಮತಲಗಳು

ದತ್ತ ಸಮತಲಗಳು $ax + by + cz + cz + d = 0$

$a'x + b'y + c'z + d' = 0$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ಸಮತಲಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಈ ಸಮತಲಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಸಮತಲಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

The combined equation to the bisector planes is

$$\frac{(ax + by + cz + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{(a'x + b'y + c'z + d')^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2} = 0$$

The sum of the coefficients of x^2, y^2, z^2 in this equation is equal to zero showing that these planes contain a right angle.

5.7 Planes passing through the intersections of two given planes

Let $p : ax + by + cz + d = 0$ and
$p' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

be the two given planes. If P (x_1, y_1, z_1) be a common point on them then $p_1 : ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ and
$p_1' : a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d' = 0$

Consider the equation $p + \lambda p' = 0$, where λ is an arbitrary constant. It is clear that $p + \lambda p' = 0$ is also a plane. It passes through P (x_1, y_1, z_1) if $p_1 + \lambda p_1' = 0$ which is true. Therefore $p + \lambda p' = 0$ represents a system of planes passing through the line of common points of $p = 0$ and $p' = 0$.

Examples. 1 If $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ be three planes such that $\lambda u + \mu v + \nu w \equiv 0$. Prove that they all pass through a common line.

$$w \equiv \frac{-\lambda}{\nu} u - \frac{\mu}{\nu} v \equiv \lambda' u + \mu' v$$

$\therefore$ $w \equiv 0$ passes through the intersections of $u = 0$, $v = 0$. That is, the three planes have a common line.

2 Find the ratio in which $ax + by + cz + d = 0$ divides the join of A (x_1, y_1, z_1) and B (x_2, y_2, z_2).

Let AB intersect the plane in the point C and let $\frac{AC}{CB} = \lambda$.

Then C is $\left[\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}\right]$.

ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{(ax+by+cz+d)^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{(a'x+b'y+c'z+d')^2}{a'^2+b'^2+c'^2} = 0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x^2, y^2, z^2 ಗಳ ಗುಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆ ; ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮತಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ.

೫.೭ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸಮತಲಗಳು

$p \equiv ax+by+cz+d=0$ ಮತ್ತು $p' \equiv a'x+b'y+c'z+d'=0$ ದತ್ತ ಸಮತಲಗಳಾಗಿರಲಿ. $P(x_1, y_1, z_1)$ ಅವುಗಳ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $p_1 \equiv ax_1+by_1+cz_1+d=0$ ಮತ್ತು $p_1' \equiv a'x_1+b'y_1+c'z_1+d'=0$. $p+\lambda p'=0$ (λ ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ) ಸಹ ಒಂದು ಸಮತಲ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಇದು $P(x_1, y_1, z_1)$ಮೂಲಕ ಸಾಗ ಬೇಕಾದರೆ $p_1+\lambda p_1'=0$ ಆಗಬೇಕು. ಇದುನಿಜ. ಆದ್ದರಿಂದ $p=0$, $p'=0$ ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ — ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯರೇಖೆಯ — ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸಮತಲಗಳ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮೀಕರಣ $p+\lambda p'=0$.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $u=0$, $v=0$, $w=0$ ಮೂರು ಸಮತಲಗಳು ; ಮತ್ತು $\lambda u+\mu v+\nu w \equiv 0$. ಈ ಸಮತಲಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸರಳರೇಖೆ ಇದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$w \equiv -\frac{\lambda}{\nu}u - \frac{\mu}{\nu}v \equiv \lambda' u+\mu' v$$

$\therefore$ $w=0$ ವು $u=0$ ಮತ್ತು $v=0$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಈ ಮೂರು ಸಮತಲಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸರಳ ರೇಖೆಯಿದೆ.

2 $A(x_1, y_1, z_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2, z_2)$ ಇವುಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು $ax+by+cz+d=0$ ವಿಭಾಗಿಸುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ,

ABಯು ಆ ಸಮತಲವನ್ನು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ ; ಮತ್ತು $\frac{AC}{CB}=\lambda$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ C ಬಿಂದು $\left[\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right]$

Since it lies on the plane we have

$$a\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}\right) + b\left(\frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right) + c\left(\frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}\right) + d = 0$$

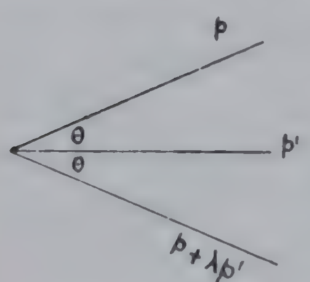
$$\therefore \quad \lambda = \frac{-(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}$$

3 Find the image of $ax + by + cz + d = 0$ on $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Let $p : ax + by + cz + d = 0$

$p' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

The image of $p = 0$ on $p' = 0$ is another plane passing through the common line of $p = 0$ and $p' = 0$ and equally inclined to $p' = 0$. $p + \lambda p' = 0$ is the general equation of all planes passing through the common line of $p = 0$, $p' = 0$. Choose λ such that $p = 0$ and $p + \lambda p' = 0$ are equally inclined to $p' = 0$;



that is, the angles between the normals of $p = 0$, $p' = 0$ and $p' = 0$, $p + \lambda p' = 0$ are equal.

$$\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{kk'}} = \frac{a'(a + \lambda a') + b'(b + \lambda b') + c'(c + \lambda c')}{\sqrt{(a + \lambda a')^2 + (b + \lambda b')^2 + (c + \lambda c')^2}\,.\ \sqrt{k'}}$$

where $k = a^2 + b^2 + c^2$

$k' = a'^2 + b'^2 + c'^2$

$$\therefore \quad (aa' + bb' + cc')^2 \,[a^2 + b^2 + c^2 + 2\lambda (aa' + bb' + cc') + \lambda^2 (a'^2 + b'^2 + c'^2)]$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)\,[aa' + bb' + cc' + \lambda (a'^2 + b'^2 + c'^2)]^2$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)\,[(aa' + bb' + cc')^2 + 2\lambda\ (aa' + bb' + cc') \times (a'^2 + b'^2 + c'^2) + \lambda^2 (a'^2 + b'^2 + c'^2)^2]$$

$$\therefore 2\lambda\,[(aa' + bb' + cc')^3 - (aa' + bb' + cc')(a^2 + b^2 + c^2) \times (a'^2 + b'^2 + c'^2)]$$

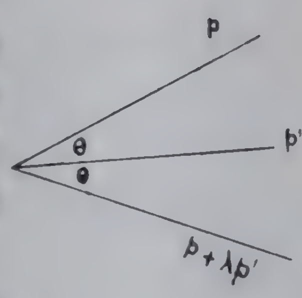
ಇದು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{a(\lambda x_2+x_1)}{\lambda+1}+\frac{b(\lambda y_2+y_1)}{\lambda+1}+\frac{c(\lambda z_2+z_1)}{\lambda+1}+d=0$$

$$\therefore\quad \lambda=-\frac{ax_1+by_1+cx_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d}$$

3 $a'x+b'y+c'z+d'=0$ ಯ ಮೇಲೆ $ax+by+cz+d=0$ ಯ ಬಿಂಬ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$p'=0$ ಯನ್ನು ಕುರಿತು $p=0$ ಯ ಬಿಂಬ ಆ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು. ಮತ್ತು $p'=0$ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಭಾಗಿಕೊಂಡಿರುವುದು. $p=0$ ಮತ್ತು $p+\lambda p'=0$ ಎರಡೂ $p'=0$ ಗೆ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿರುವಂತೆ λ ವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $p=0,\ p'=0;$ $p'=0,\ p+\lambda p'=0$ ಈ ಸಮತಲಗಳ ಲಂಬಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನಾಗಿವೆ.



$$\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{kk'}}=\frac{a'(a+\lambda a')+b'(b+\lambda b')+c'(c+\lambda c')}{\sqrt{(a+\lambda a')^2+(b+\lambda b')^2+(c+\lambda c')^2}\sqrt{k'}}$$

ಇಲ್ಲಿ $k=a^2+b^2+c^2,\ k'=a'^2+b'^2+c'^2$

$\therefore\ (aa'+bb'+cc')^2\,[a^2+b^2+c^2+z\lambda\,(aa'+bb'+cc')+\lambda^2\,(a'^2+b'^2+c'^2)]=(a^2+b^2+c^2)\,[(aa'+bb'+cc')^2+2\lambda\,(aa'+bb'+cc')\times(a'^2+b'^2+c'^2)+\lambda^2\,(a'^2+b'^2+c'^2)^2]$

$$+ \lambda^2 (a'^2 + b'^2 + c'^2) \, [(aa' + bb' + cc')^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \times (a'^2 + b'^2 + c'^2)] = 0$$

$$\lambda (a'^2 + b'^2 + c'^2) \, [(aa' + bb' + cc')^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \times (a'^2 + b'^2 + c'^2)]$$
$$+ 2 (aa' + bb' + cc') \, [(aa' + bb' + cc')^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \times (a'^2 + b'^2 + c'^2)] = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = - \frac{2(aa' + bb' + cc')}{a'^2 + b'^2 + c'^2}$$

$\therefore$ The reflection is

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2)(ax + by + cz + d) - 2(aa' + bb' + cc')(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

4 If a plane cuts the axes in A, B, C show that the foot of the normal from the origin to the plane is the orthocentre of $\triangle$ A B C. Deduce that the orthocentre of the triangle formed by the intersections of the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ with the axes is $[a^{-1} (a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})^{-1}, b^{-1} (a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})^{-1}, c^{-1} (a^{-2} + c^{2} + c^{-2})^{-1}]$

Let $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$ be the equation of the plane ABC. If ON be drawn perpendicular to it then N is $(p \cos \alpha, p \cos \beta, p \cos \gamma)$. The vertices are A $(p \sec \alpha, 0, 0)$, B $(0, p \sec \beta, 0)$, C $(0, 0, p \sec \gamma)$.

The direction ratios of AN are $[p (\sec \alpha - \cos \alpha), -p \cos \beta, -p \cos \gamma]$. The direction ratios of BC are $(0, -p \sec \beta, p \sec \gamma)$. These contain a right angle if

$p^2 - p^2 = 0$ which is true.

Therefore N is the intersection of the altitudes of the triangle ABC. Hence N is the orthocentre.

The orthocentre of the triangle formed by the intersections of the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ with the axes is got by identifying this plane with $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$

$$\therefore \quad \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{a}} = \frac{\cos \beta}{\frac{1}{b}} = \frac{\cos \gamma}{\frac{1}{c}} = p$$

$$\therefore \quad \lambda = -\frac{2(aa'+bb'+cc')}{a'^2+b'^2+c'^2}$$

∴ ಬೇಕಾದ ಬಿಂಬ

$$(a'^2+b'^2+c'^2)(ax+by+cz+d) \\ -2(aa'+bb'+cc')(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

4 ಒಂದು ಸಮತಲ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು A, B, C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಈ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದ △ ABC ಯ ಲಂಬ ಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ಈ ಸಮತಲ ವಾದರೆ ಅದು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಕೇಂದ್ರ $[a^{-1}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}, b^{-1}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}, c^{-1}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}]$ ಎಂದು ಪಡೆಯಿರಿ.

ABC ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$ ಎಂದಿರಲಿ. ON ನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದರೆ N ಬಿಂದು $(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$ ಆಗುವುದು. △ ABC ಯ ಶೃಂಗಗಳು $A(p\sec\alpha, 0, 0)$, $B(0, p\sec\beta, 0)$, $C(0, 0, p\sec\gamma)$ ಆಗಿವೆ. AN ನ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು $[p(\sec\alpha-\cos\alpha), -p\cos\beta, -p\cos\gamma]$. BC ಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು $[0, -p\sec\beta, p\sec\gamma]$. ಇವು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಲು ನಿಯಮ $p^2-p^2=0$. ಇದು ನಿಜ. ಆದ್ದರಿಂದ △ ABC ಯ ಲಂಬಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು N. ಆದ್ದರಿಂದ N ಲಂಬ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.

ದತ್ತ ಸಮತಲ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ಆದಾಗ

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{a}}=\frac{\cos\beta}{\frac{1}{b}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{1}{c}}=p$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}}{\sqrt{a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}}} = (a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

The orthocentre is N $(p \cos \alpha, p \cos \beta, p \cos \gamma)$

$$p \cos \alpha = (a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})^{-\frac{1}{2}}.\ a^{-1} (a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= a^{-1} (a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}$$

$$p \cos \beta = b^{-1} (a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}$$

$$p \cos \gamma = c^{-1} (a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}$$

5 A is the area of a given plane. The areas of its projections on the coordinate planes are A_x, A_y, A_z, respectively. Prove that $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$.

Deduce that the square of the area of the triangle whose vertices are (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) is

$$\tfrac{1}{4}\sum \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

Let the plane make angles α, β, γ with the x, y and z planes respectively.

Then $A_x = A \cos \alpha$, $A_y = A \cos \beta$, $A_z = A \cos \gamma$

$$\therefore \quad A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Now $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ are the direction cosines of the normal to the plane.

$$\therefore \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\therefore \quad A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

Let A be the area of the triangle formed by (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Let A_x, A_y, A_z be the areas of the projections of this triangle on the coordinate planes. Then the vertices of the triangle A_x are $(0, y_1, z_1)$, $(0, y_2, z_2)$, $(0, y_3, z_3)$.

$$\therefore \quad A_x = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}}{\sqrt{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}} = (a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

ಲಂಬಕೇಂದ್ರ N ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(p\cos\alpha,\ p\cos\beta, p\cos\gamma)$

$p\cos\alpha = (a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-\frac{1}{2}}.\ \ a^{-1}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{\frac{1}{2}}$

$\quad = a^{-1}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}$

$p\cos\beta = b^{-1}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}$

$p\cos\gamma = c^{-1}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}$

5 ಒಂದು ದತ್ತ ಸಮತಲದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ A. ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲಗಳ ಮೇಲೆ ಅದರ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳು A_x, A_y, A_z. $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಶೃಂಗಗಳು (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ $\frac{1}{4}\sum \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

x, y, z ಸಮತಲಗಳೊಡನೆ ಈ ಸಮತಲಗಳು α, β, γ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿ. ಆಗ $A_x = A\cos\alpha$, $A_y = A\cos\beta$, $A_z = A\cos\gamma$.

$\therefore\ A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$

ಇಲ್ಲಿ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ಗಳು ಸಮತಲದ ಲಂಬದ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು.

$\therefore\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$$\therefore\ A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ A ಆಗಿರಲಿ. ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲಗಳ ಮೇಲೆ ಅದರ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳು A_x, A_y, A_z ಆಗಿರಲಿ. A_x ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳು $(0, y_1, z_1)$, $(0, y_2, z_2)$, $(0, y_3, z_3)$.

$$\therefore\ A_x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Similarly for A_y and A_z.

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

Exercise 5.1

1 Find the value of c in order that the planes $x + 2y + cz + 4 = 0$ and $6x - 3y + 2z + 5 = 0$ may contain an angle of $\frac{\pi}{4}$.

2 Find the equations to the planes passing through the common line of $3x + 4y - z + 3 = 0$ and $2x - y + 5z - 3 = 0$ and (i) perpendicular to $x + y + z - 1 = 0$

(ii) parallel to $x - y - 3z + 2 = 0$

(iii) intercepting 1 on the x-axis.

Find the intercepts made on the remaining axes.

3 Prove that the equation to the plane through (x_1, y_1, z_1) parallel to $ax + by + cz = 0$ is $ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$.

4 Find the combined equation to the bisector planes of the angles between

$$2x - 6y + 3z - 5 = 0 \quad \text{and}$$
$$x - 2y + 2z + 4 = 0$$

5 Find the orthocentre of the triangle whose vertices are (1, 1, 1), (1, 0, 2), (− 2, 1, 0).

6 Find the value of c so that $2x^2 + 3y^2 + cz^2 + 4xy - 2yz - 6zx = 0$ may represent a pair of planes. Find also the angle between these planes.

7 P, Q, R, S are four coplanar points on the sides AB, BC, CD, DA of a skew quadrilatural. Prove that

$$\frac{AP}{PB}\ \frac{BQ}{QC}\ \frac{CR}{RD}\ \frac{DS}{SA} = 1$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ A_y ಮತ್ತು A_z ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$
$$= \frac{1}{4} \sum \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

ಅಭ್ಯಾಸ ೫.೧

1 $x+2y+cz+4=0$ ಮತ್ತು $6x-3y+2z+5=0$ ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\pi/4$ ಆಗಿರುವಂತೆ c ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2 $3x+4y-z+3=0$ ಮತ್ತು $2x-y+5z-3=0$ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು

(i) $x+y+z-1=0$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ

(ii) $x-y-3z+2=0$ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ

(iii) $x-$ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 1 ರೇಖಾಂತರಿಸುವ ಸಮತಲಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

3 (x_1, y_1, z_1) ಬಿಂದು ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $ax+by+cz=0$ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ $ax+by+cz= ax_1+by_1+cz_1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 $2x-6y+3z-5=0$ ಮತ್ತು $x-2y+2z+4=0$ ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ಸಮತಲಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣ ಪಡೆಯಿರಿ.

5 $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(-2, 1, 0)$ ಶೃಂಗಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರ ಪಡೆಯಿರಿ.

6 $2x^2+3y^2+cz^2+4xy-2yz-6zx=0$. ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮತಲಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ c ಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಆ ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7 ಒಂದು ಅತಲ ಚತುರ್ಭುಜದ AB, BC, CD, DA ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ P, Q, R, S ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಸಮತಲೀಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8 A variable plane is at a constant distance p from the origin and meets the axes in A, B, C. Through A, B, C planes are drawn parallel to the coordinate planes. Prove that the locus of their point of intersection is

$$x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = p^{-2}$$

9 Prove that the coordinates of the common point of the three planes

$$a_r x + b_r y + c_r x + d_r = 0, \; r = 1, 2, 3$$

are proportional to

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & d_2 \\ c_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

10 The coordinates of a point with reference to the rectangular system OXYZ are (x, y, z). With reference to another rectangular system through O, namely OXYZ, the coordinates of the same point are (X, Y, Z). If the direction cosines of OX, OY, OZ with reference to $Oxyz$ are (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) (l_3, m_3, n_3) show that

$$X = l_1 x + m_1 y + n_1 z$$
$$Y = l_2 x + m_2 y + n_2 z$$
$$Z = l_3 x + m_3 y + n_3 z$$

and

$$x = l_1 X + l_2 Y + l_3 Z$$
$$y = m_1 X + m_2 Y + m_3 Z$$
$$z = n_1 X + n_2 Y + n_3 Z$$

11 P is a variable point on the fixed plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. The plane through P perpendicular to OP meets the coordinate axes in A, B, C. The planes through A, B, C respectively parallel to the x, y, z planes meet at Q. Show that the locus of Q is

$$x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = (ax)^{-1} + (by)^{-1} + (cz)^{-1}$$

8 ಒಂದು ಚರಸಮತಲ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ p ಯಷ್ಟು ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು A, B, C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. A, B. C ಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ಸಮತಲಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$$x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=p^{-2}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9 $a_r x+b_r y+c_r z+d_r=0, r=1, 2, 3$ ಈ ಮೂರು ಸಮತಲ ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & d_2 \\ c_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

ಅನುಪಾತಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. $oXYZ$ ಎಂಬ ಲಂಬೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y, z). O ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ OXYZ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (X, Y, Z). $Oxyz$ ನ್ನು ಕುರಿತು OX, OY, OZ ಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) ಆಗಿದ್ದರೆ

$$X = l_1x + m_1y + n_1z$$
$$Y = l_2x + m_2y + n_2z$$
$$Z = l_3x + m_3y + n_3z \qquad \text{ಮತ್ತು}$$
$$x = l_1 X + l_2 Y + l_3 Z$$
$$y = m_1 X + m_2 Y + m_3 Z$$
$$z = n_1 X + n_2 Y + n_3 Z$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ಎಂಬ ಸ್ಥಿರ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಚರ ಬಿಂದುವಿದೆ. P ಯ ಮೂಲಕ OP ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಸಮತಲ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು A, B, C ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. A, B, C ಮೂಲಕ ಕ್ರಮವಾಗಿ x, y, z ಸಮತಲಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಉಳಿದ ಸಮತಲಗಳು Q ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. Q ವಿನ ಪಥ $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=(ax)^{-1}+(by)^{-1}+(cz)^{-1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12 a, b, c are the lengths of sides of a given triangle. If the axes of coordinates pass through the mid-points of the sides of the triangle show that the equation to the triangle is

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1, \text{ where}$$

$8\,\alpha^2 = b^2 + c^2 - a^2,\quad 8\,\beta^2 = c^2 + a^2 - b^2,$
$8\,\gamma^2 = a^2 + b^2 - c^2$

13 $Oxyz$ and $OXYZ$ are two rectangular systems through O. A plane cuts them at distances a, b, c and A, B, C from the origin. Prove that

$$a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} = A^{-2} + B^{-2} + C^{-2}.$$

14 A plane intersects the coordinate axes in the points A, B, C. Prove that the squares of the cosines of the angles made by this plane with the coordinate planes are cot B cot C, cot C cot A, cot A cot B.

15 $F(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\,hxy + 2\,fyz + 2\,gzx = 0$ represents a pair of planes. Prove that the product of the perpendiculars from (x_1, y_1, z_1) on these planes is

$$\frac{F(x_1, y_1, z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4\,f^2 + 4\,g^2 + 4\,h^2 - 2\,bc - 2\,ca - 2\,ab}}.$$

16 Find the area of the triangle whose vertices are (1, 2, 1), (0, 2, 4), (− 2, − 1, 0).

17 Find the area of the triangle formed by the intersections of $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$ with the coordinate axes.

12 ಒಂದು ದತ್ತ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು a, b, c. ನಿರ್ದೇಶ ಕಾಕ್ಷಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗಿದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $8\alpha^2 = b^2 + c^2 - a^2$, $8\beta^2 = c^2 + a^2 - b^2$, $8\gamma^2 = a^2 + b^2 - c^2$

13 $Oxyz$ ಮತ್ತು $OXYZ$ ಗಳು O ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಎರಡು ಲಂಬೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು. ಒಂದು ಸಮತಲ ಇವುಗಳನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ a, b, c ಮತ್ತು A, B, C ದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

$$a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} = A^{-2} + B^{-2} + C^{-2}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14 ಒಂದು ಸಮತಲ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು A, B, C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮತಲ ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲಗಳೊಡನೆ ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳ ಕೊಸೈನುಗಳ ವರ್ಗಗಳು $\cot B \cot C$, $\cot C \cot A$, $\cot A \cot B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

15 $F(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx = 0$ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮತಲಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. (x_1, y_1, z_1) ರಿಂದ ಈ ಸಮತಲಗಳ ಮೇಲಿನ ಲಂಬಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$\frac{F(x_1, y_1, z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4f^2 + 4g^2 + 4h^2 - 2bc - 2ca - 2ab}}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16 $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 4)$, $(-2, -1, 0)$ ಶೃಂಗಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17 $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$ ಸಮತಲ ನಿರ್ದೇಶ ಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

CHAPTER 6

THE STRAIGHT LINE

6.1 Straight line. We may consider a straight line as the join of two distinct points (§ 3.1, postulate 1) or as the intersection of two planes (§ 3.1, postulate 8). Starting from these concepts we can obtain the equations to a straight line as shown below.

I Let the two given points be A (x_1, y_1, z_1) and B (x_2, y_2, z_2). Let P (x, y, z) be any point on the straight line AB. Then the direction cosines of PA and AB must be equal.

$$\therefore x - x_1 \propto x_1 - x_2,\ y - y_1 \propto y_1 - y_2,\ z - z_1 \propto z_1 - z_2$$

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} = r \qquad \dots (6.1)$$

This is called the symmetric form of the equations to a straight line. $(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)$ which are the direction ratios of AB can be replaced by l, m, n. So (6.1) can be rewritten as $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n} = r \quad \dots (6.2)$

Any point on this line is $(lr + x_1,\ mr + y_1,\ nr + z_1)$. By changing the parameter r we get different points on the line. Only when (l, m, n) are the direction cosines of AB will r give the actual distance between (x_1, y_1, z_1) and this point; for in that case we have the distance

$$= \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.r = r.$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೬

ಸರಳರೇಖೆ

೬.೧ ಸರಳರೇಖೆ

ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಣೆ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಂದಾಗಲಿ (§ 3.1, ಆಧಾರ ಭಾವನೆ 1) ಅಥವಾ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದಾಗಲಿ (§ 3.1, ಆಧಾರ ಭಾವನೆ 8) ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಈ ಭಾವನೆಗಳಿಂದ ತೊಡಗಿ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

1 $A(x_1, y_1, z_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2, z_2)$ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $P(x, y, z)$, AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ PA ಮತ್ತು AB ಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು.

$$\therefore \quad x-x_1 \propto x_1-x_2, \; y-y_1 \propto y_1-y_2, \; z-z_1 \propto z_1-z_2$$

$$\therefore \quad \frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2} = r \qquad \cdots(6.1)$$

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮಾಂಗರೂಪ ಎಂದು ಇದರ ಹೆಸರು. AB ಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳಾದ $(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$ ಗಳ ಬದಲು l, m, n ಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ (6.1) ನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = r \qquad \cdots(6.2)$$

$(lr+x_1, \; mr+y_1, \; nr+z_1)$ ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು. ಪ್ರಾಚಲ r ನ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಯಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ವಿವಿಧ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. (l, m, n) ಗಳು AB ಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳಾದಾಗ ಮಾತ್ರ r, (x_1, y_1, z_1) ಕ್ಕೂ ಈ ಬಿಂದುವಿಗೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ನೀಡುವುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ದೂರ

$$= \sqrt{l^2+m^2+n^2}. \quad r = r,$$

II Let the equations to the two given planes be

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

The straight line determined by these planes is

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \quad \cdots (6.3)$$

The equations to the two planes taken together determine their common line. The coordinate axes are

$$y = 0 = z \qquad (x\text{-axis})$$
$$z = 0 = x \qquad (y\text{-axis})$$
$$x = 0 = y \qquad (z\text{-axis})$$

6.2 Symmetric form. Equations (6.3) can be put in the symmetric form. A careful observation of (6.2) will show that in the symmetric form the coordinates of a point on the line and the direction ratios of the line must be known. We may therefore consider the intersection of

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$$

with any plane—in particular to simplify the calculation we consider the intetsection of the line with the z-plane. The point is

$$a_1x + b_1y + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + d_2 = 0 \qquad \text{and } z = 0$$

i.e., $$\left[\frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{d_1a_2 - d_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, 0\right]$$

The normals to the planes are normals to the required line also. If the direction ratios of the line are l, m, n, then

$$a_1l + b_1m + c_1n = 0$$
$$a_2l + b_2m + c_2n = 0$$

$$\therefore\ l : m : n \equiv (b_1c_2 - b_2c_1) : (c_1a_2 - c_2a_1) : (a_1b_2 - a_2b_2)$$

2 ಎರಡು ದತ್ತ ಸಮತಲಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad \text{ಮತ್ತು}$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \quad \text{ಆಗಿರಲಿ.}$$

ಈ ಸಮತಲಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2 \qquad \cdots (6.3)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ ಲಭಿಸುವುದು. ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು:

$$y=0=z \qquad (x-\text{ಅಕ್ಷ})$$
$$z=0=x \qquad (y-\text{ಅಕ್ಷ})$$
$$x=0=y \qquad (z-\text{ಅಕ್ಷ})$$

೬.೨ ಸಮಾಂಗರೂಪ

(6.3) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಮಾಂಗರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. (6.2) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ ನಮ್ಮ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳು ಎರಡು — ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಮತ್ತು ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು -- ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುವುದು. ಅದ್ದರಿಂದ $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ ಸರಳರೇಖೆ ಯಾವುದೇ ಸಮತಲವನ್ನು ಭೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. z — ಸಮತಲವನ್ನು ಇಂಥ ಒಂದು ಸಮತಲವಾಗಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಗಣನೆ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಭೇದನ ಬಿಂದು

$$a_1x+b_1y+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+d_2=0 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad z=0$$

$$\text{ಅಂದರೆ} \left[\frac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad \frac{d_1a_2-d_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad 0\right]$$

ಸಮತಲಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಬೇಕಾದ ರೇಖೆಗೂ (ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಭೇದನ ರೇಖೆ) ಲಂಬವಾಗಿವೆ. ಅದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು l, m, n ಆದರೆ

$$a_1l+b_1m+c_1n=0$$
$$a_2l+b_2m+c_2n=0$$

$$\therefore \quad l:m:n \equiv (b_1c_2-b_2c_1):(c_1a_2-c_2a_1):(a_1b_2-a_2b_1)$$

Therefore the equations to the straight line are

$$\frac{x - \dfrac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y - \dfrac{d_1 a_2 - d_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{z}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

It has been assumed that the equation $z = 0$ is consistent with the equations of the line. If this is not so we may use $x = 0$ or $y = 0$ or any other equation $a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$ consistent with the given equations.

Examples. 1 Find the equations to the perpendicular from A (α, β, γ) to the plane $ax + by + cz + d = 0$. Deduce the perpendicular distance of the plane from the point A. Calculate the coordinates of the foot of the perpendicular.

The required equations are

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c}$$

where a, b, c are the direction ratios of the normal to the plane; they are therefore the direction ratios of the required perpendicular. If the direction cosines are ak, bk, ck we have $(a^2 + b^2 + c^2)\, k^2 = 1$.

Any point on the line

$$\frac{x-\alpha}{ak} = \frac{y-\beta}{bk} = \frac{z-\gamma}{ck} = r \quad \text{is}$$

N $(akr + \alpha,\ bkr + \beta,\ ckr + \gamma)$. If it is made to lie on the given plane then N is the foot of the perpendicular from A on the plane and AN $(= r)$ is the length.

$$\therefore \quad (akr + \alpha)\, a + (bkr + \beta)\, b + (ckr + \gamma)\, c + d = 0$$
$$rk\, (a^2 + b^2 + c^2) = -\, (a\alpha + b\beta + c\gamma + d)$$
$$r = -\, \frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma + d)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Knowing the values of r and k the coordinates of N can be easily written.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{x - \dfrac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1}}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y - \dfrac{d_1a_2-d_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$z=0$ ಸಮೀಕರಣ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಸಂಗತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದು ಆಗದಿದ್ದಾಗ $x=0$ ಅಥವಾ $y=0$ ಅಥವಾ $a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$ ಎಂಬ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಗತವಾಗುವ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 A (α, β, γ) ದಿಂದ $ax+by+cz+d=0$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮತಲದ ಲಂಬದೂರ ಪಡೆಯಿರಿ. ಲಂಬಪಾದದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು $\dfrac{x-\alpha}{a} = \dfrac{y-\beta}{b} = \dfrac{z-\gamma}{c}$

ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ಸಮತಲದ ಲಂಬದ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು ak, bk, ck ಆದರೆ

$(a^2+b^2+c^2)\,k^2=1$.

$\dfrac{x-\alpha}{ak} = \dfrac{y-\beta}{bk} = \dfrac{z-\gamma}{ck} = r$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು N $(akr+\alpha,\ bkr+\beta,\ ckr+\gamma)$ ಆಗಿದೆ. N ಬಿಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ ಅದು A ಯಿಂದ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದವಾಗುವುದು. AN $(=r)$. ಈ ಲಂಬದ ಉದ್ದ

$$\therefore\quad (akr+\alpha)\,a + (bkr+\beta)\,b + (ckr+\gamma)\,c + d = 0$$

$$rk\,(a^2+b^2+c^2) = -(a\alpha + b\beta + c\gamma + d)$$

$$\therefore\quad r = -\frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma + d)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

r ಮತ್ತು k ಬೆಲೆಗಳು ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ N ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

2 Find the equations to the straight line through (α, β, γ) and parallel to the straight line

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2$$

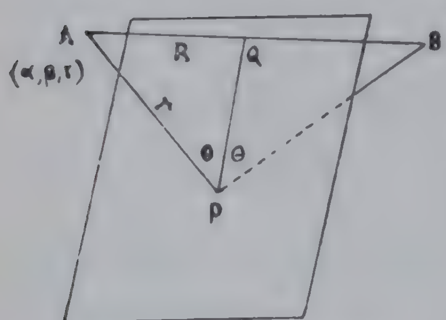
The direction ratios of the given line are $(b_1 c_2 - b_2 c_1, c_1 a_2 - c_2 a_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$. Therefore the equations to the required line are

$$\frac{x-\alpha}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y-\beta}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{z-\gamma}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

3 Find the image of

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \text{ in the plane}$$

$$ax + by + cz + d = 0.$$



Let the line meet the plane in P $(lr + \alpha, mr + \beta, nr + \gamma)$. Then

$$r = -\frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma + d)}{al + bm + cn}$$

Let PB be the image of PA on the given plane. Therefore the angles made by PA and PB with the normal to the plane are equal. If (l', m', n') be the direction cosines of PB we have

$$al' + bm' + cn' = al + bm + cn \qquad \cdots (1)$$

The plane APB is perpendicular to the given plane.

$$\therefore \quad a(mn' - m'n) + b(nl' - n'l) + c(lm' - l'm) = 0$$

$$\therefore \quad (bn - cm)\, l' + (cl - an)\, m' + (am - bl)\, n' = 0 \qquad (2)$$

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1 \qquad (3)$$

Between (1), (2), (3) l', m', n' can be calculated.

Equations to PB are

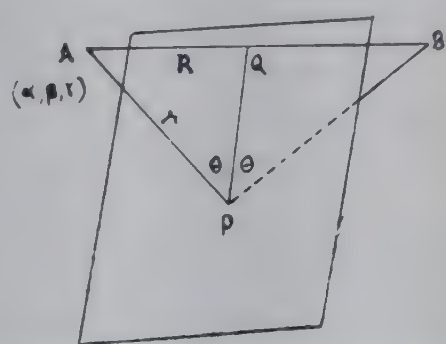
$$\frac{x-(lr+\alpha)}{l'} = \frac{y-(mr+\beta)}{m'} = \frac{z-(nr+\gamma)}{n'}$$

2 (α, β, γ) ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ $=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು $(b_1c_2-b_2c_1, c_1a_2-c_2a_1, a_1b_2-a_2b_1)$. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{x-\alpha}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y-\beta}{c_1a_2-c_2a_1} = \frac{z-\gamma}{a_1b_2-a_2b_1}$$

3 $ax+by+cz+d=0$ ಸಮತಲವನ್ನು ಕುರಿತು $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಬಿಂಬವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ AP ಸಮತಲವನ್ನು $P(lr+\alpha, mr+\beta, nr+\gamma)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

$$\therefore \quad r = -\frac{(a\alpha+b\beta+c\gamma+d)}{al+bm+cn}$$

ಸಮತಲವನ್ನು ಕುರಿತು AP ಯ ಬಿಂಬ PB ಆಗಿರಲಿ. ∴ PA ಮತ್ತು PB ಗಳು ಸಮತಲದ ಲಂಬದೊಡನೆ ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. PB ಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (l', m', n') ಆಗಿದ್ದರೆ

$$al'+bm'+cn' = al+bm+cn \qquad \cdots (1)$$

APB ಸಮತಲ ದತ್ತ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad a(mn'-m'n)+b(nl'-n'l)+c(lm'-l'm)=0$$

$$\therefore \quad (bn-cm)l'+(cl-an)m'+(am-bl)n'=0 \quad (2)$$

$$l'^2+m'^2+n'^2=1 \quad (3)$$

ಈ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ l', m', n' ಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ PB ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{x-(lr+\alpha)}{l'} = \frac{y-(mr+\beta)}{m'} = \frac{z-(nr+\gamma)}{n'}$$

Alternatively we may suppose B is the image of A so that AB is perpendicularly bisected by the plane at Q. The coordinates of B are

$(\alpha + 2aR, \beta + 2bR, \gamma + 2cR)$, where

$R = -\dfrac{(a\alpha + b\beta + c\gamma + d)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Knowing the coordinates of P we can write the equations to PB.

4 Find the condition that

$\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n} = r$ may lie on the plane $ax + by + cz + d = 0$.

The condition is that the point $(lr + x_1, mr + y_1, nr + z_1)$ should lie on the plane for all values of r.

$\therefore \quad a(lr + x_1) + b(mr + y_1) + c(nr + z_1) + d = 0$

for all values of r.

$\therefore al + bm + cn = 0$

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$

These conditions express the fact that the point (x_1, y_1, z_1) on the line lies on the plane; and the normal to the plane is normal to the line also.

5 Find the condition for the coplanarity of two lines

$\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1} = r_1$ and

$\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_1}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2} = r_2$

Let them lie on the plane

$ax + by + cz + d = 0$

The conditions are

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0 \\ al_1 + bm_1 + cn_1 &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d &= 0 \\ al_2 + bm_2 + cn_2 &= 0 \end{aligned}$$

ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ, A ಯು ಬಿಂಬ B ಬಿಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ AB ಯನ್ನು ಸಮತಲ Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬೀಯವಾಗಿ ಸಮದ್ವಿಭಾಗಿಸುವುದು. B ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(\alpha + 2aR, \ \beta + 2bR, \ \gamma + 2cR)$. ಇಲ್ಲಿ

$$R = -\frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma + d)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ PB ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

4 $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n} = r$ ಸರಳರೇಖೆ $ax + by + cz + d = 0$ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರಲು ನಿಯಮವೇನು?

r ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $(lr + y, mr + y, nr + y)$ ಬಿಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆಯೇ ಇರಬೇಕು—ಇದು ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ.

$$\therefore \quad a(lr + x_1) + b(mr + y_1) + c(nr + z_1) + d = 0$$

$$\therefore \quad al + bm + cn = 0, \quad ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

ಈ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ಅಂಶಗಳು: ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಬಿಂದು (x_1, y_1, z_1) ಸಮತಲದ ಮೇಲೆಯೂ ಇದೆ; ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗೂ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

5 $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1} = r_1$ ಮತ್ತು

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} = r_2$$

ಇವೆರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮತಲೀಯತೆಗೆ ನಿಯಮ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅವು $ax + by + cz + = 0$ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರಲಿ.

ನಿಯಮಗಳು
$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0 \\ al_1 + bm_1 + cn_1 &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d &= 0 \\ a_2 + bm_2 + cn_2 &= 0 \end{aligned}$$

Eliminating a, b, c, d we have

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

or
$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Alternatively, we can make use of the fact that two coplanar lines always intersect. Therefore for some value of r_1 and some other value of r_2 both the lines should give the same point.

$$\therefore \quad l_1 r + x_1 = l_2 r_2 + x_2$$
$$m_1 r_1 + y_1 = m_2 r_2 + y_2$$
$$n_1 r_1 + z_1 = n_2 r_2 + z_2$$

$$\therefore \quad x_1 - x_2 + l_1 r_1 - l_2 r_2 = 0$$
$$y_1 - y_2 + m_1 r_1 - m_2 r_2 = 0$$
$$z_1 - z_2 + n_1 r_1 - n_2 r_2 = 0$$

Eliminating r_1 and r_2 we get

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & l_1 & l_2 \\ y_1 - y_2 & m_1 & m_2 \\ z_1 - z_2 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

which is the required condition.

5 Find whether the straight lines

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \text{and}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5} \quad \text{are coplanar}$$

and if so find the point of intersection; and in this case find the equation to the plane containing them.

The straight lines will intersect (i.e., will be coplanar) if r and r' can be so chosen as to satisfy

$$2r + 1 = 3r' + 2$$
$$3r + 2 = 4r' + 3$$
$$4r + 3 = 5r' + 4$$

ಇವುಗಳಿಂದ a, b, c, d ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

ಇದೇ ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ.

ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ. ಎರಡು ಸಮತಲೀಯ ರೇಖೆಗಳು ಸದಾ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬ ಗುಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ r_1 ರ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೂ r_2 ರ ಇನ್ನೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ $(l_1r_1 + x_1,\ m_1r_1 + y_1,\ n_1r_1 + z_1)$ ಮತ್ತು $(l_2r_2 + x_2,\ m_2r_2 + y_2,\ n_2r_2 + z_2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಬೇಕು.

$$\therefore\quad x_1 - x_2 + l_1r_1 - l_2r_2 = 0$$
$$y_1 - y_2 + m_1r_1 - m_2r_2 = 0$$
$$z_1 - z_2 + n_1r_1 - n_2r_2 = 0$$

r_1 ಮತ್ತು r_2 ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ಮೊದಲು ಪಡೆದ ನಿಯಮವೇ ಬರುವುದು.

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & l_1 & l_2 \\ y_1 - y_2 & m_1 & m_2 \\ z_1 - z_2 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

5 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ ಮತ್ತು

$\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{5}$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು

ಸಮತಲೀಯವೇ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಹೌದಾದರೆ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಅವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನೂ ಪಡೆಯಿರಿ.

r ಮತ್ತು r' ಗಳನ್ನು

$$2r + 1 = 3r' + 2$$
$$3r + 5 = 4r' + 3$$
$$4r + 3 = 5r' + 4$$

ಆಗಿರುವಂತೆ ಆರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

$$\therefore \quad 2r - 3r' = 1$$
$$3r - 4r' = 1$$
$$4r - 5r' = 1$$

$r = -1$, $r' = -1$ satisfy all these equations. Hence the straight lines intersect. The point of intersection is $(-1, -1, -1)$. The equation to the plane containing them is

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

or $$x - 2y + z = 0$$

6 Find the condition for the coplanarity of the lines

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} = r \quad \text{and}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array}\right\}$$

The general point $(lr + \alpha, mr + \beta, nr + \gamma)$ should lie on the second line. The conditions are

$$r = -\frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma + d)}{al + bm + cn} = -\frac{(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + d')}{a'l + b'm + c'n}$$

$$\therefore \quad (a\alpha + b\beta + c\gamma + d)(a'l + b'm + c'n)$$
$$= (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + d')(al + bm + cn)$$

7 Find the condition for the coplanarity of the lines

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 = a_4x + b_4y + c_4z + d_4$$

Let these lines intersect at (x_1, y_1, z_1)

$$\therefore \quad a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1 = 0$$
$$a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_2 + d_2 = 0$$
$$a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 + d_3 = 0$$
$$a_4x_1 + b_4y_1 + c_4z_1 + d_4 = 0$$

Eliminating x_1, y_1, z_1 we get the condition

$$\therefore \quad 2r-3r' = 1$$
$$3r-4r' = 1$$
$$4r-5r' = 1$$

$\therefore \quad r=-1, r'=-1$ ಈ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ ತಾಳೆ ನೋಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ; ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದು $(-1, -1, -1)$. ಅವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ $\quad x-2y+z=0$

6 $\quad \dfrac{x-\alpha}{l} = \dfrac{y-\beta}{m} = \dfrac{z-\gamma}{n} = r$ ಮತ್ತು

$$\left.\begin{aligned} a\,x + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮತಲೀಯತೆಯ ನಿಯಮನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದು $(lr+\alpha, \ mr+\beta, \ nr+r)$ ಎರಡನೆಯ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಹ ಇರಬೇಕು.

$$\therefore \quad r = -\frac{(a\alpha+b\beta+c\gamma+d)}{al+bm+cn} = -\frac{(a'\alpha+b'\beta+c'\gamma+d')}{a'l+b'm+c'n}$$

$$\therefore \quad (a\alpha+b\beta+c\gamma+d')(a'l+b'm+c'n)$$
$$=(a'\alpha+b'\beta+c'\gamma+d')\ (al+bm+cn)$$

7 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮತಲೀಯತೆಗೆ ನಿಯಮ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0 = a_2x+b_2y+c_2z+d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3 = 0 = a_4x+b_4y+c_4z+d_4$$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದು (x_1, y_1, z_1) ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1=0$$
$$a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2=0$$
$$a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1+d_3=0$$
$$a_4x_1+b_4y_1+c_4z_1+d_4=0$$

(x_1, y_1, z_1) ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ ದೊರೆಯುವುದು.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_4 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

8 Find the projections of

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r \text{ on the}$$

coordinate planes.

One point on the line is $P(x_1, y_1, z_1)$. Its projectio on the z-plane is $P'(x_1, y_1, 0)$. The intersection of the lin with the z-plane is $Q(lr + x_1,\ mr + y_1,\ nr + z_1)$, wher $nr + z_1 = 0$. Therefore Q is

$$\left(-\frac{lz_1}{n} + x_1, -\frac{mz_1}{n} + y_1, 0 \right).$$ The projection o the line on the z-plane is the line $P'Q$. Its equations ar

$$\frac{x - x_1}{\frac{lz_1}{n}} = \frac{y - y_1}{\frac{mz_1}{n}}, \quad z = 0$$

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}, \quad z = 0$$

Similarly the projections on $x = 0$ and $y = 0$ are respectivel

$$x = 0, \quad \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

and $$y = 0, \quad \frac{x - x_1}{l} = \frac{z - z_1}{n}$$

6.3 Lines intersecting two given lines. Let the two given lines be $L_1 = 0 = M_1$ and $L_2 = 0 = M_2$. $L_1 + \lambda M_1 = 0$ is a plane containing the first line and $L_2 + \mu M_2 = 0$ is a plane containing the second line. The intersection of these planes is a line coplanar with the given lines. Therefore $L_1 + \lambda M_1 = 0 = L_2 + \mu M_2$ are the equations to the line coplanar with the given lines.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

8 ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲಗಳ ಮೇಲೆ

$\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n} = r$ ಸರಳರೇಖೆಯ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು $P(x_1, y_1, z_1)$. z-ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಅದರ ವಿಕ್ಷೇಪ $P'(x_1, y_1, 0)$. z-ಸಮತಲದೊಡನೆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಛೇದನ ಬಿಂದು $Q\,(lr+x_1, mr+y_1, nr+z_1)$. ಇಲ್ಲಿ $nr+z_1=0$. ಅದ್ದರಿಂದ,

Q ಬಿಂದು $\left(-\dfrac{lz_1}{n} + x_1, -\dfrac{mz_1}{n} + y_1, 0 \right)$ ಆಗುವುದು.

z- ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ವಿಕ್ಷೇಪ P′Q. ಇದರ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{x-x_1}{\frac{lz_1}{n}} = \frac{y-y_1}{\frac{mz_1}{n}}, \quad z=0$$

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}, \quad z=0$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ $x=0$ ಮತ್ತು $y=0$ ಸಮತಲಗಳ ಮೇಲಿನ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳು

$$x = 0, \quad \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

ಮತ್ತು $y=0, \quad \dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{z-z_1}{n}$

೬.೩ ಎರಡು ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $L_1=0=M_1$ ಮತ್ತು $L_2=0=M_2$ ಆಗಿರಲಿ. $L_1+\lambda M_1=0$ ಮೊದಲಿನ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೂ $L_2+\mu M_2=0$ ಎರಡನೆಯ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮತಲಗಳು. ಈ ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನ ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳೊಡನೆ ಸಮತಲೀಯವಾಗಿದೆ. ಅದ್ದರಿಂದ $L_1+\lambda M_1=0=L_2+\mu M_2$ ಸರಳರೇಖೆ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವುದು.

Examples. 1 Find the equations to the straight line drawn from the point (1, 2, 3) intersecting the lines

$$x - y + 2z + 5 = 0 = 2x + y + 3z - 1$$
$$2x - 2y + 3z + 1 = 0 = x - 3y + 2z + 2$$

The required equations are

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 2z + 5 + \lambda\,(2x + y + 3z - 1) = 0 \\ 2x - 2y + 3z + 1 + \mu\,(x - 3y + 2z + 2) = 0 \end{array}\right\}$$

This straight line passses through (1, 2, 3).

$$\therefore \quad 10 + 12\lambda = 0, \quad 8 + 3\mu = 0$$

$\therefore$ The equations to the straight line are

$$4x + 11y + 3z - 35 = 0$$
$$2x - 18y + 7z + 13 = 0$$

These are two planes passing through one of the given lines and the given point.

2 Find the equations of the line drawn through (α, β, γ) parallel to the plane $lx + my + nz + p = 0$ and intersecting the line $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$.

The required line obviously lies in the plane

$$l(x - \alpha) + m(y - \beta) + n(z - \gamma) = 0 \qquad \cdots (1)$$

Since the line should intersect the given line it should also lie in the plane

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

λ is calculated from the condition that the plane should pass through (α, β, γ)

$$\therefore \quad \lambda = -\frac{a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1} = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2} \qquad (2)$$

Equations (1) and (2) together determine the required line.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು. 1 (1, 2, 3) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಮತ್ತು

$$x-y+2z+5=0=2x+y+3z-1$$
$$2x-2y+3z+1=0=x-3y+2z+2$$

ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\left.\begin{array}{l} x-y+2z+5+\lambda(2x+y+3z-1)=0 \\ 2x-2y+3z+1+\mu(x-3y+2z+2)=0 \end{array}\right\}$$

ಇವು (1, 2, 3) ಬಿಂದು ಮೂಲಕ ಸಾಗಲು ನಿಯಮಗಳು

$$10+12\lambda=0, \quad 8+3\mu-0$$

$\therefore$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$4x+11y+3z-35=0=2x-18y+7z+13$$

ಇವು ಎರಡು ಸಮತಲಗಳು; ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಮತ್ತು ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಇವು ಸಾಗುತ್ತವೆ.

2 (α, β, γ) ದ ಮೂಲಕ $lx+my+nz+p=0$ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಮತ್ತು

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಪಡೆಯಿರಿ.

ಬೇಕಾದ ಸರಳರೇಖೆ $l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)=0$ ···(1) ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಈ ಸರಳರೇಖೆ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು $a_1x+b_1y_1+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಸಹ ಇರಬೇಕು. ಆದರೆ (α, β, γ) ಬಿಂದು ಈ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆ.

$$\therefore \quad \lambda = -\frac{a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1}{a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1} = \frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2} \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಬೇಕಾದ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ.

6.4 Angle between a plane and a straight line. Let $ax + by + cz + d = 0$ be the plane and

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_2}{n} = r$$ the straight line.

If θ be the angle between them we have

$$\cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2)}}$$

If $al + bm + cn = 0$ the straight line will be parallel to the plane.

Examples. 1 Find the equations to the line through $(3, 1, -4)$ parallel to $3x + 4y - z + 2 = 0 = x - y + 2z - 1$.

Let the direction ratios of the given line be l, m, n. Then

$$3l + 4m - n = 0$$
$$l - m + 2n = 0$$
$$\therefore \quad \frac{l}{7} = \frac{m}{-7} = \frac{n}{-7}$$

The equations to the required line are

$$\frac{x - 3}{-1} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z + 4}{1}$$

2 Find the equation to the plane through the line

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 3}{1}$$

and parallel to the line $3x - 2y + z - 1 = 0 = x + y - 2z + 3$.

The equation to the plane through the given straight line is

$$a(x - 1) + b(y + 2) + c(z - 3) = 0 \qquad \cdots(1)$$

where $2a + 3b + c = 0 \qquad \cdots(2)$

If l, m, n be the direction ratios of the given line we have

$$3l - 2m + n = 0$$
$$l + m - 2n = 0$$

೬.೪ ಒಂದು ಸಮತಲ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ

$ax + by + cz + d = 0$ ದತ್ತ ಸಮತಲವೂ

$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r$ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯೂ ಆಗಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಆಗಿದ್ದರೆ $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$$= \frac{al + bm + cn}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2)}}$$

$al + bm + cn = 0$ ಆದಾಗ ಸರಳರೇಖೆ ಸಮತಲಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು,

1 (3, 1, − 4) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $3x + 4y - z + 2 = 0 = x - y + 2z - 1$ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು (l, m, n) ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ

$$3l + 4m - n = 0$$
$$l - m + 2n = 0$$
$$\therefore \frac{l}{7} = \frac{m}{-7} = \frac{n}{-7}$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{1}$$

2 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $3x - 2y + z - 1 = 0 = x + y - 2z + 3$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬೇಕಾದ ಒಂದು ಸಮತಲ

$$a(x-1) + b(y+2) + c(z-3) = 0 \qquad \cdots (1)$$

ಇಲ್ಲಿ $2a + 3b + c = 0 \qquad \cdots (2)$

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು l, m, n ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ

$$3l - 2m + n = 0$$
$$l + m - 2n = 0$$

$$\therefore \quad \frac{l}{3} = \frac{m}{7} = \frac{n}{5}$$

$$\therefore \quad 3a + 7b + 5c = 0 \qquad \cdots(3$$

Eliminating a, b, c between (1), (2), (3) we get the equatio[n] to the required plane as

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

or $$8x - 7y + 5z - 37 = 0$$

3 The coordinates of the points A, B, C, P are $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, (a, b, c) respectively. O is the origin. Show that the angle between OP and the plane ABC is

$\sin^{-1} \dfrac{(3q)}{p}$, where $p^2 = a^2 + b^2 + c^2$ and

$\dfrac{1}{q^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$. Show further that the distance between the feet of the perpendiculars from O and P on the plane ABC is $\sqrt{p^2 - 9q^2}$.

The equation to the plane ABC is

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

The direction ratios of the normal to this plane are

$\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right)$. The direction ratios of OP are a, b, c.

If θ be the angle between OP and the plane we have

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$= \frac{3q}{p}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3q}{p}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{l}{3} = \frac{m}{7} = \frac{n}{5}$$

$$\therefore \quad 3a + 7b + 5c = 0 \qquad \cdots(3)$$

(1), (2), (3) ರಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ಬೇಕಾದ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ $\quad 8x - 7y + 5z - 37 = 0$

3 A, B, C, P ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, (a, b, c). O ಮೂಲ ಬಿಂದು. OP ಮತ್ತು ABC ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\sin^{-1}\left(\frac{3q}{p}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $\quad p^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad$ ಮತ್ತು

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

O ಮತ್ತು P ಗಳಿಂದ ABC ಸಮತಲದ ಮೇಲೆಳೆದ ಲಂಬಗಳ ಪಾದಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $\sqrt{p^2 - 9q^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ABC ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ಈ ಸಮತಲದ ಲಂಬದ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$.

OP ಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು (a, b, c). OP ಮತ್ತು ABC ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$= \frac{3}{p} \cdot q$$

$$\therefore \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{3q}{p}\right)$$

Let OM and PN be the perpendiculars to the plane ABC. Their equations are

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = r$$

$$\frac{x-a}{\frac{1}{a}} = \frac{y-b}{\frac{1}{b}} = \frac{z-c}{\frac{1}{c}} = r'$$

If M and N be the points $\left(\frac{r}{a}, \frac{r}{b}, \frac{r}{c}\right)$

and $\left(\frac{r'}{a}+a, \frac{r'}{b}+b, \frac{r'}{c}+c\right)$ since they lie on the plane we have

$$\frac{r}{a^2} + \frac{r}{b^2} + \frac{r}{c^2} = 1 \text{ or } r = q^2$$

$$\frac{r'}{a^2} + 1 + \frac{r'}{b^2} + 1 + \frac{r'}{c^2} + 1 = 1$$

$$\text{or } r' = -2q^2$$

$$MN^2 = \left(\frac{r-r'}{a} - a\right)^2 + \left(\frac{r-r'}{b} - b\right)^2 + \left(\frac{r-r'}{c} - c\right)^2$$

$$= \left(\frac{3q^2}{a} - a\right)^2 + \left(\frac{3q^2}{b} - b\right)^2 + \left(\frac{3q^2}{c} - c\right)^2$$

$$= 9q^4 \times \frac{1}{q^2} + a^2 + b^2 + c^2 - 18q^2$$

$$= p^2 - 9q^2$$

$$MN = \sqrt{p^2 - 9q^2}$$

4 If the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx = 0$ represents two planes prove that their line of intersection is $Fx = Gy = Hz$, where F, G, H are the minors of f, g, h in the determinant

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}. \quad \text{(See § 5.5)}$$

OM ಮತ್ತು PN ಗಳು ABC ಗೆ ಲಂಬಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = r \quad \text{ಮತ್ತು}$$

$$\frac{x-a}{\frac{1}{a}} = \frac{y-b}{\frac{1}{b}} = \frac{z-c}{\frac{1}{c}} = r'$$

M ಮತ್ತು N ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\left(\frac{r}{a}, \frac{r}{b}, \frac{r}{c}\right)$

ಮತ್ತು $\left(\frac{r'}{a} + a, \frac{r'}{b} + b, \frac{r'}{c} + c\right)$ ಆದರೆ

(ಅವು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ)

$$\frac{r}{a^2} + \frac{r}{b^2} + \frac{r}{c^2} = 1 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad r = q^2$$

$$\frac{r'}{a^2} + 1 + \frac{r'}{b^2} + 1 + \frac{r'}{c^2} + 1 = 1$$

ಅಥವಾ $r' = -2q^2$

$$MN^2 = \left(\frac{r-r'}{a} - a\right)^2 + \left(\frac{r-r'}{b} - b\right)^2 + \left(\frac{r-r'}{c} - c\right)^2$$

$$= \left(\frac{3q^2}{a} - a\right)^2 + \left(\frac{3q^2}{b} - b\right)^2 + \left(\frac{3q^2}{c} - c\right)^2$$

$$= 9\frac{q^4}{q^2} + a^2 + b^2 + c^2 - 18q^2$$

$$= p^2 - 9q^2$$

$$MN = \sqrt{p^2 - 9q^2}$$

4 $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx = 0$ ಸಮೀಕರಣ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಛೇದನ ರೇಖೆ $Fx = Gy = Hz$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ F, G, H ಗಳು

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ f, g, h ಗಳ ಲಘುಗಳು (§ 5.5 ನ್ನು ನೋಡಿ).

Let the equations to the two planes be $lx + my + nz = 0$ and $l'x + m'y + n'z = 0$. If (λ, μ, v) are the direction ratios of the common line of these planes we have $\lambda : \mu : v = (mn' - m'n) : (nl' - n'l) : (lm' - l'm)$. The equations to the straight line are (one point on it is the origin)

$$\frac{x}{mn' - m'n} = \frac{y}{nl' - n'l} = \frac{z}{lm' - l'm}$$

$$\therefore \quad (nl' - n'l)(lm' - l'm)\,x = (lm' - l'm)(mn' - m'n)\,y$$
$$= (mn' - m'n)(nl' - n'l)\,z$$

Now $nl' - n'l = \sqrt{(nl' + n'l)^2 - 4\,nn'll'}$

$= 2\lambda\ \sqrt{g^2 - ac}$ (see § 5.5)

Similarly $lm' - l'm = 2\lambda\ \sqrt{h^2 - ab}$

$$\therefore \quad (nl' - n'l)(lm' - l'm) = 4\lambda^2\ \sqrt{g^2 - ac)(h^2 - ab)}$$
$$= 4\lambda^2\ (gh - af)$$

(because $abc + 2\,fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$).

$\therefore$ The equations to the straight line are

$4\,\lambda^2\, Fx = 4\,\lambda^2\, Gy = 4\,\lambda^2\, Hz$

or $Fx = Gy = Hz$.

5 Find the perpendicular distance of the straight line

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r$$

from the point (α, β, γ). Find also the coordinates of the foot of the perpendicular.

Let A be the point (x_1, y_1, z_1) and P the point (α, β, γ). A lies on the line. Draw PN perpendicular to the line. Then AN is the projecton of AP on the given line.

$$\therefore \quad AN = (x_1 - \alpha)\,l + (y_1 - \beta)\,m + (z_1 - \gamma)\,n$$
$$PA = \sqrt{x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2}$$
$$PN^2 = PA^2 - AN^2$$

ಆ ಎರಡು ಸಮತಲಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $lx + my + nz = 0$ ಮತ್ತು $l'x + m'y + n'z = 0$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇವುಗಳ ಛೇದನ ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು (λ, μ, ν) ಆಗಿದ್ದರೆ $\lambda : \mu : \nu = (mn' - m'n) : (nl' - n'l) : (lm' - l'm)$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಇದರ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮೂಲಬಿಂದು)

$$\frac{x}{mn' - m'n} = \frac{y}{nl' - n'l} = \frac{z}{lm' - l'm}$$

$$\therefore \; (nl' - n'l)(lm' - l'm)\,x = (lm' - l'm)(mn' - m'n)\,y$$
$$= (mn' - m'n)(nl' - n'l)\,z$$

$$nl' - n'l = \sqrt{(nl' + n'l)^2 - 4nn'll'}$$
$$= 2\lambda\sqrt{g^2 - ac} \qquad \text{(§ 5.5 ನೋಡಿ)}$$

ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ $lm' - l'm = 2\lambda\sqrt{h^2 - ab}$

$$\therefore \; (nl' - n'l)(lm' - l'm) = 4\lambda^2\sqrt{(g^2 - ac)(h^2 - ab)}$$
$$= 4\lambda^2(gh - af)$$

$(\because \; abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0)$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$4\lambda^2 Fx = 4\lambda^2 Gy = 4\lambda^2 Hz$$
$$Fx = Gy = Hz$$

5 (α, β, γ) ದಿಂದ $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಲಂಬದೂರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಲಂಬಪಾದದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

A ಯು (x_1, y_1, z_1) ಮತ್ತು P ಯು (α, β, γ) ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore$ A ಬಿಂದು ದತ್ತರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ. PN ನ್ನು ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯ ಬೇಕು. ಆಗ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ APಯ ವಿಕ್ಷೇಪ AN.

$$\therefore \; AN = (x_1 - \alpha)l + (y_1 - \beta)m + (z_1 - \gamma)n$$
$$PA = \sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2}$$
$$\therefore \; PN^2 = PA^2 - AN^2$$

$$= (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2$$
$$-\ [(x_1 - \alpha)\, l + (y_1 - \beta)\, m + (z_1 - \gamma)\, n]^2$$

Now $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\therefore\ PN^2 = [l\,(y_1 - \beta) - m\,(x_1 - \alpha)]^2$$
$$+\ [m\,(z_1 - \gamma) - n\,(y_1 - \beta)]^2 + [n\,(x_1 - \alpha) - l\,(z_1 - \gamma)]^2$$

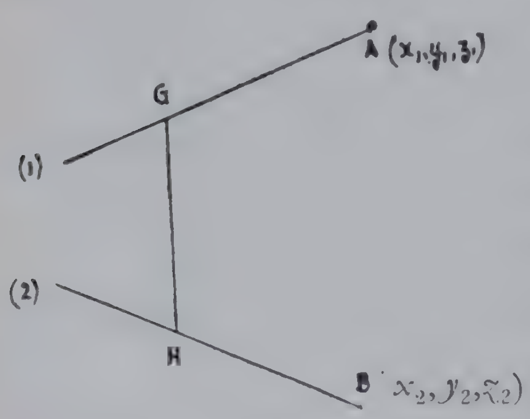
To calculate the coordinates of N (the foot of the perpendicular) we take r = AN (known). Then N is $[lr + x_1, mr + y_1, nr + z_1]$.

6.5 Shortest distance between two given straight liens. When two straight lines are neither parallel nor intersecting they are said to be skew (§ 3·3). In § 3.7 theorem 8 we have seen how to draw the shortest distance between two skew lines. Let the two skew lines be

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} = r_1 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} = r_2 \qquad \ldots(2)$$

The l's, etc. are the direction cosines.



Let A and B be the points (x_1, y_1, z_1) and (x_2, y_2, z_2) respectively. Let GH be the shortest distance between the given lines. Then

$$\angle AGH = \angle BHG = \frac{\Pi}{2}$$

Letthe direction cosines of GH be λ, μ, v. Then

$$\lambda l_1 + \mu m_1 + \nu n_1 = 0$$
$$\lambda l_2 + \mu m_2 + \nu n_2 = 0$$

$$= (x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 + (z_1-\gamma)^2$$
$$- [(x_1-\alpha)l + (y_1-\beta)m + (z_1-\gamma)n]^2$$

ಈಗ $l^2+m^2+n^2 = 1$

$$\therefore \quad PN^2 = [l(y_1-\beta) - m(x_1-\alpha)]^2$$
$$+ [m(z_1-\gamma) - n(y_1-\beta)]^2$$
$$+ [n(x_1-\alpha) - l(z_1-\gamma)]^2$$

ಲಂಬಪಾದ N ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಲು r = AN (ಗೊತ್ತಿದೆ) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆಗ N $[lr+x_1, mr+y_1, nr+z_1]$.

೬.೫ ಎರಡು ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲದಾಗ ಮತ್ತು ಛೇದಿಸದಾಗ ಅವನ್ನು ಅತಲರೇಖೆಗಳು, ಅತಲೀಯಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (§ 3·3). § 3·7ರ ಪ್ರಮೇಯ 8 ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅತಲೀಯಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಂಬ ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ (ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ) ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} = r_1 \qquad \cdots(1)$$

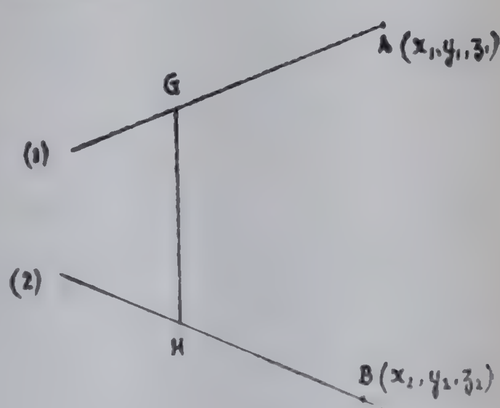
$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} = r_2 \qquad \cdots(2)$$

ಆಗಿರಲಿ. l ಮುಂತಾದುವುಗಳು ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು.

A ಮತ್ತು B ಗಳು (x_1, y_1, z_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2, z_2) ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ GH ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\angle AGH = \angle BHG = \frac{\Pi}{2}$$

GHನ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು λ, μ, ν ಆಗಿರಲಿ.



ಆಗ $\lambda l_1 + \mu m_1 + \nu n_1 = 0$

$$\lambda l_2 + \mu m_2 + \nu n_2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{\mu}{n_1l_2 - n_2l_1} = \frac{\nu}{l_1m_2 - l_2m_1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sum (m_1n_2 - m_2n_1)^2}}.$$

GH = projection of AB on GH

$$= (x_1 - x_2)\lambda + (y_1 - y_2)\mu + (z_1 - z_2)\nu$$

$$= \frac{(m_1n_2 - m_2n_1)(x_1 - x_2) + (n_1l_2 - n_2l_1)(y_1 - y_2) + (l_1m_2 - l_2m_1)(z_1 - z_2)}{\sqrt{\sum (m_1n_2 - m_2n_1)^2}}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1n_2 - m_2n_1)^2}.$$

The equations to the shortest distance GH are determined as follows. GH is the intersection of the planes AGH and BGH.

$$\therefore \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

are the equations to GH.

We may now observe that two intersecting straight lines have their shortest distance equal to zero. Hence the condition for the coplanarity of two lines is

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

(see § 6.3)

We may also find the shortest distance using the following properties. The shortest distance is equal to (i) the perpendicular from any point $(x_1 + l_1r_1,\ y_1 + m_1r_1,\ z_1 + n_1r_1)$ on the first line to the plane drawn through the second parallel to the first; (ii) the distance between two planes each passing through one line and parallel to the other.

$$\frac{\lambda}{m_1 n_2 - m_2 n_1} = \frac{\mu}{n_1 l_2 - n_2 l_1} = \frac{\nu}{l_2 m_1 - m_1 l_2}$$
$$= \frac{l}{\sqrt{\sum_1 (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}}$$

GH = GH ಮೇಲೆ AB ಯ ವಿಕ್ಷೇಪ

$$= (x_1 - x_2)\lambda + (y_1 - y_2)\mu + (z_1 - z_2)\nu$$

$$= \frac{(m_1 n_2 - m_2 n_1)(x_1 - x_2) + (n_1 l_2 - n_2 l_1)(y_1 - y_2) + (l_1 m_2 - l_2 m_1)(z_1 - z_2)}{\sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ GH ನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮ. GH ರೇಖೆ AGH ಮತ್ತು BHG ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನ. ಆದ್ದರಿಂದ GH ನ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\therefore \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ ಸೊನ್ನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮತಲೀಯತೆಗೆ ನಿಯಮ

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

(§ 6.3 ನೋಡಿ)

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಸಹ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು: ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ (i) ಒಂದನೆಯ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು $(x_1 + l_1 r_1,\ y_1 + m_1 r_1,\ z_1 + n_1 r_1)$ ರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಮೊದಲಿನ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆಳೆದ ಲಂಬಕ್ಕೆ ಸಮಾನ; (ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಸಮಾನ.

(1) Plane through $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$

parallel to $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1} = r_1$ is

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Perpendicular from $(x_1 + l_1 r_1, \quad y_1 + m_1 r_1, \quad z_1 + n_1 r_1)$ to this plane is

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 + l_1 r_1 & y_1 - y_2 + m_1 r_1 & z_1 - z_2 + n_1 r_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

= S. D. between the two lines.

(2) Planes through each of the given skew lines parallel to the other skew line are

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ and } \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Draw OPQ the perpendicular from the origin to these parallel planes.

$$OP = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

$$OQ = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

$\therefore \quad PQ = OQ - OP$

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

= S. D. between the two lines.

(i) $$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$ ಮೂಲಕ

ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ ಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸಮತಲ

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$(x_1+l_1 r_1,\ y_1+m_1 r_1,\ z_1+n_1 r_1)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಈ ಸಮತಲದ ಲಂಬದೂರ

$$=\begin{vmatrix} x_1-x_2+l_1 r_1 & y_1-y_2+m_1 r_1 & z_1-z_2+n_1 r_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2-m_2 n_1)^2}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2-m_2 n_1)^2}$$

= ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ.

(ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅತಲೀಯದ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಅತಲೀಯಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸಮತಲಗಳು

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ಮತ್ತು } \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

ಮೂಲಬಿಂದು O ಸಿಂದ OPQವನ್ನು ಇವುಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಬೇಕು.

$$OP = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2-m_2 n_1)^2}$$

$$OQ = -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_1-m_2 n_1)^2}$$

$$\therefore PQ = OQ - OP = \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2-m_2 n_1)^2}$$

= ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ

Examples. 1 Find the S.D. between the skew lines $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ and $a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0=a_4x+b_4y+c_4z+d_4$.

One method is to reduce these equations to the symmetric form and then proceed to as discussed earlier. An independent method will be shown here.

Planes through these lines parallel to the other are

$$(a_1+\lambda a_2)x+(b_1+\lambda b_2)y+(c_1+\lambda c_2)z+d_1+\lambda d_2=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$(a_3+\mu a_4)x+(b_3+\mu b_4)y+(c_3+\mu c_4)z+d_3+\mu d_4=0 \quad \cdots \quad (2)$$

where λ, μ are constants connected by the relations

$$\frac{a_1+\lambda a_2}{a_3+\mu a_4}=\frac{b_1+\lambda b_2}{b_3+\mu b_4}=\frac{c_1+\lambda c_2}{c_3+\mu c_4}=k \text{ say} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

The distance D between these parallel planes is the shortest distance between the skew lines.

$$\therefore \quad D=\frac{d_1+\lambda d_2}{\sqrt{(a_1+\lambda a_2)^2+(b_1+\lambda b_2)^2+(c_1+\lambda c_2)^2}}$$

$$-\frac{d_3+\mu d_4}{\sqrt{(a_3+\mu a_4)^2+(b_3+\mu b_4)^2+(c_3+\mu c_4)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a_3+\mu a_4)^2+(b_3+\mu b_4)^2+(c_3+\mu c_4)^2}}$$

$$\times\left[\frac{d_1+\lambda d_2}{k}-(d_3+\mu d_4)\right]$$

The direction ratios of the given lines are $b_1c_2-b_2c_1$; $c_1a_2-c_2a_1$; $a_1b_2-a_2b_1$ and $b_3c_4-b_4c_3$; $c_3a_4-c_4a_3$; $a_3b_4-a_4b_3$. Let these ratios be equal to A_1, B_1, C_1 and A_2, B_2, C_2 respectively. Now plane (2) is parallel to the first line.

$$\therefore \quad (a_3+\mu a_4)A_1+(b_3+\mu b_4)B_1+(c_3+\mu c_4)C_1=0$$

$$\therefore \mu=\frac{-(a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1)}{a_4A_1+b_4B_1+c_4C_1}$$

$$\therefore \quad a_3+\mu a_4$$

$$=\frac{a_3a_4A_1+a_3b_4B_1+a_3c_4C_1-a_3a_4A_1-b_3a_4B_1-c_3a_4C_1}{a_4A_1+b_4b_1+c_4C_1}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು. 1 $a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1 = 0 = a_2 x+ b_2 y +c_2 z+d_2$ ಮತ್ತು $a_3 x+b_3 y+c_3 z+d_3 = 0 = a_4 x+b_4 y+c_4 z +d_4$ ಇವೆರಡು ಆತಲೀಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಂದು ವಿಧಾನದ ಪ್ರಕಾರ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಮಾಂಗ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಈ ಹಿಂದೆ ವಿವರಿಸಿದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು. ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು.

ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸಮತಲಗಳು

$$(a_1+\lambda a_2)\ x+(b_1+\lambda b_2)\ y+(c_1+\lambda c_2)\ z+d_1+\lambda d_2 =0 \quad (1)$$

$$(a_3+\mu b_4)\ x+(b_3+\mu b_4)\ y+(c_3+\mu c_4)\ z+d_3+\mu d_4 = 0 \quad (2)$$

ಇಲ್ಲಿ λ, μ ಗಳ ಸಂಬಂಧ

$$\frac{a_1+\lambda a_2}{a_3+\mu a_4} = \frac{b_1+\lambda b_2}{b_3+\mu b_4} = \frac{c_1+\lambda c_2}{c_3+\mu c_4} = k \text{ ಎಂದಿರಲಿ} \qquad \ldots \quad (3)$$

ಈ ಸಮಾಂತರ ಸಮತಲಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ D ಯೇ ಆತಲೀಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ.

$$\therefore\ D = \frac{d_1+\lambda d_2}{\sqrt{(a_1+\lambda a_2)^2+(b_1+\lambda b_2)^2+(c_1+\lambda c_2)^2}}$$

$$- \frac{d_3+\mu d_4}{\sqrt{(a_3+\mu a_4)^2+(b_3+\mu b_4)^2+(c_3\ \mu c_4)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a_3+\mu a_4)^2+(b_3+\mu b_4)^2+(c_3+\mu c_4)^2}}\left[\frac{d_1+\lambda d_2}{k}-(d_3+\mu d_4)\right]$$

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು $b_1 c_2 - b_2 c_1$; $c_1 a_2 - c_2 a_1$; $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ಮತ್ತು $b_3 c_4 - b_4 c_3$; $c_3 a_4 - c_4 a_3$; $a_3 b_4 - a_4 b_3$. ಈ ಪ್ರಮಾಣಗಳು A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 ಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರಲಿ. ಸಮತಲ (2) ಒಂದನೆಯ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ.

$$\therefore\ (a_3+\mu a_4)\ A_1 + (b_3+\mu b_4)\ B_1 + (c_3+\mu c_4)\ C_1 = 0$$

$$\mu = \frac{-(a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1)}{a_4 A_1 + b_4 B_1 + c_4 C_1}$$

$$\therefore a_3+\mu a_4 = \frac{a_3 a_4 A_1 + a_3 b_4 B_1 + a_4 c_4 C_1 - a_3 a_4 A_1 - b_3 a_4 B_1 - c_3 a_4 C_1}{a_4 A_1 + b_4 B_1 + c_4 C_1}$$

$$= \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{a_4A_1 + b_4B_1 + c_4C_1}$$

with similar values for $b_3 + \mu b_4$ and $c_3 + \mu c_4$.

$$\therefore \quad (a_3 + \mu a_4)^2 + (b_3 + \mu b_4)^2 + (c_3 + \mu c_4)^2$$

$$= \frac{\sum (B_1C_2 - B_2C_1)^2}{(a_4A_1 + b_4B_1 + c_4C_1)^2} = \nu^2 \text{ say.}$$

$$\therefore \quad D = \frac{d_1 + \lambda d_2}{k\nu} - \frac{d_3 + \mu d_4}{\nu}$$

$$\therefore \quad d_1 + \lambda d_2 - k(d_3 + D\nu) - k\mu d_4 = 0$$

Equations (3) can be rewritten as follows :

$$a_1 + \lambda a_2 - ka_3 - k\mu a_4 = 0$$
$$b_1 + \lambda b_2 - kb_3 - k\mu b_4 = 0$$
$$c_1 + \lambda c_2 - kc_3 - k\mu c_4 = 0$$

Eliminating λ, k, $k\mu$ from these equations we get

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 + D\nu & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad D = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}}{\nu \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}}$$

Now $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = a_4A_1 + b_4B_1 + c_4C_1$

and $\nu = \dfrac{\sqrt{\sum (B_1C_2 - B_2C_1)^2}}{a_4A_1 + b_4B_1 + c_4C_1}$

$$= \frac{B_1 C_2 - C_1 B_2}{a_4 A_1 + b_4 B_1 + c_4 C_1}$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ $b_3 + \mu b_4$ ಮತ್ತು $c_3 + \mu c_4$ ಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\therefore (a_3 + \mu a_4)^2 + (b_3 + \mu b_4)^2 + (c_3 + \mu c_4)^2$$

$$= \frac{\sum (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2}{(a_4 A_1 + b_4 B_1 + c_4 C_1)^2} = \nu^2$$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore D = \frac{d_1 + \lambda d_2}{k \nu} - \frac{d_3 + \mu d_4}{\nu}$$

$$\therefore d_1 + \lambda d_2 - k (d_3 + D \nu) - k \mu d_4 = 0$$

(3) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$a_1 + \lambda a_2 - k a_3 - k \mu a_4 = 0$$
$$b_1 + \lambda b_2 - k b_3 - k \mu b_4 = 0$$
$$c_1 + \lambda c_2 - k c_3 - k \mu c_4 = 0$$

ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ $\lambda, k_{\cdot 1}\ k\mu$ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ ದೊರೆಯುವ ನಿರ್ಧಾರಕ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 + D\nu & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore D = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}}{\nu \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}}$$

ಈಗ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = a_4 A_1 + b_4 B_1 + c_4 C_1$

ಮತ್ತು $\nu = \frac{\sqrt{\sum (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2}}{a_4 A_1 + b_4 B_1 + c_4 C_1}$

$$\therefore \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (B_1C_2 - B_2C_1)^2}$$

Note that when the two saraight lines intersect they are coplanar; and in this case $D = 0$. The relevant condition is

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

2 Two straight lines

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} = r_1 \text{ and}$$

$\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2} = r_2$ are cut by a third line whose direction cosines are λ, μ, ν. Find the length intercepted on it and hence deduce the S.D.

Let the third line intersect the given lines at P $(l_1r_1 + x_1, m_1r_1 + y_1, n_1r_1 + z_1)$ and Q $(l_2r_2 + x_2, m_2r_2 + y_2, n_2r_2 + z_2)$. Let the intercept PQ be equal to d. Then the projections of PQ on the three axes are

$d\lambda$ = difference in the x-coordinates of P and Q = $l_1r_1 - l_2r_2 + x_1 - x_2$

Similarly $\quad d\mu = m_1r_1 - m_2r_2 + y_1 - y_2$

$$d\nu = n_1r_1 - n_2r_2 + z_1 - z_2$$

$$\therefore \quad l_1r_1 - l_2r_2 - d\lambda + x_1 - x_2 = 0$$

$$m_1r_1 - m_2r_2 - d\mu + y_1 - y_2 = 0$$

$$n_1r_1 - n_2r_2 - d\nu + z_1 - z_2 = 0$$

$$\therefore \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (B_1C_2 - B_2C_1)^2}$$

ಇವೆರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸಿದರೆ ಆಗ ಅವು ಸಮತಲೀಯುವಾಗುವುವು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ D = 0. ಇದರ ನಿರ್ಬಂಧ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

2 $$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} = r_1 \quad \text{ಮತ್ತು}$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} = r_2$$

ಇವೆರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನೂ (λ, μ, ν) ದಿಕ್ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾಗಳಿರುವ ಮೂರನೆಯ ಸರಳರೇಖೆ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಾಗುವ ರೇಖಾಂತರದ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೂರನೆಯ ಸರಳರೇಖೆ ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳನ್ನು P $(l_1 r_1 + x_1, \ m_1 r_1 + y_1, \ n_1 r_1 + z_1)$ ಮತ್ತು Q $(l_2 r_2 + x_2, \ m_2 r_2 + y_2, \ n_2 r_2 + z_2)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. PQ ರೇಖಾಂತರದ ಉದ್ದ d ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಮೂರು ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ PQ ವಿನ ವಿಕ್ಷೇಪಗಳು :

$d\lambda$ = P ಮತ್ತು Q ಗಳ x–ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$$= l_1 r_1 - l_2 r_2 + x_1 - x_2$$

ಅದೇ ರೀತಿ $d\mu = m_1 r_1 - m_2 r_2 + y_1 - y_2$

$$d\nu = n_1 r_1 - n_2 r_2 + z_1 - z_2$$

$$\therefore \quad l_1 r_1 - l_2 r_2 - d\lambda + x_1 - x_2 = 0$$

$$m_1 r_1 - m_2 r_2 - d\mu + y_1 - y_2 = 0$$

$$n_1 r_1 - n_2 r_2 - d\nu + z_1 - z_2 - 0$$

Solving for r_1, r_2, d we have

$$\frac{r_1}{\begin{vmatrix} l_2 & \lambda & x_1 - x_2 \\ m_2 & \mu & y_1 - y_2 \\ n_2 & \nu & z_1 - z_2 \end{vmatrix}} = \frac{r_2}{\begin{vmatrix} \lambda & x_1 - x_2 & l_1 \\ \mu & y_1 - y_2 & m_1 \\ \nu & z_1 - z_2 & n_1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{d}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & l_1 & l_2 \\ y_1 - y_2 & m_1 & m_2 \\ z_1 - z_2 & n_1 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \lambda \\ m_1 & m_2 & \mu \\ n_1 & n_2 & \nu \end{vmatrix}}.$$

$$\therefore \quad d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}}$$

When the intercept PQ is perpendicular to both the given straight lines d becomes the S.D. between them.

$$\therefore \quad \lambda l_1 + \mu m_1 + \nu n_1 = 0$$

$$\lambda l_2 + \mu m_2 + \nu n_2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{m_1 n_2 - m_2 n_1} = \frac{\mu}{n_1 l_2 - n_2 l_1} = \frac{\nu}{l_1 m_2 - l_2 m_1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}}$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \lambda (m_1 n_2 - m_2 n_1) + \mu (n_1 l_2 - n_2 l_1) + \nu (l_1 m_2 - l_2 m_1)$$

$$= \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_2)^2}$$

$$\therefore \quad d = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_2)^2}$$

r_1, r_2, d ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$\frac{r_1}{\begin{vmatrix} l_2 & \lambda & x_1 - x_2 \\ m_2 & \mu & y_1 - y_2 \\ n_2 & \nu & z_1 - z_2 \end{vmatrix}} = \frac{r_2}{\begin{vmatrix} \lambda & x_1 - x_2 & l_1 \\ \mu & y_1 - y_2 & m_1 \\ \nu & z_1 - z_2 & n_1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{d}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & l_1 & l_2 \\ y_1 - y_2 & m_1 & m_2 \\ z_1 - z_2 & n_1 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \lambda \\ m_1 & m_2 & \mu \\ n_1 & n_2 & \nu \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \quad d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}}$$

ರೇಖಾಂತರ PQ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳೆಡಕ್ಕೂ ಲಂಬವಾದಾಗ d ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರವಾಗುವುದು.

$$\therefore \quad \lambda l_1 + \mu m_1 + \nu n_1 = 0$$

$$\lambda l_2 + \mu m_2 + \nu n_2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{m_1 n_2 - m_2 n_1} = \frac{\mu}{n_1 l_2 - n_2 l_1} = \frac{\nu}{l_1 m_2 - l_2 m_1}$$

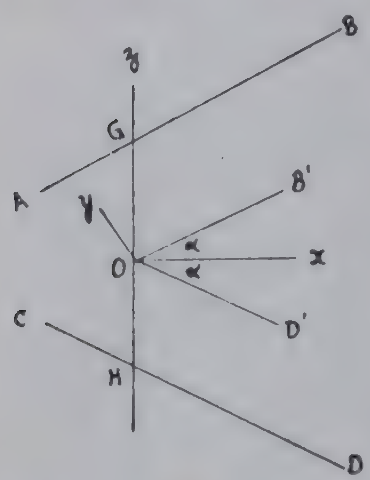
$$= \frac{1}{\sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}}$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \lambda (m_1 n_2 - m_2 n_1) + \mu (n_1 l_2 - n_2 l_1) + \nu (l_1 m_2 - l_2 m_1)$$

$$= \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

$$\therefore \; d = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}$$

6.6 Simplified form of the equations to a pair of skew lines. Let AB, CD be a pair of skew lines and GH the S.D. between them. Let GH$=2c$. Choose O the mid-point of GH as the origin and OG as the positive direction of the z-axis. Draw OB$'$ and OD$'$ parallel to the lines. Since GO is perpendicular to both OB$'$ and OD$'$ it (z-axis) is perpendicular to the plane B$'$OD$'$. Choose the bisectors of the $\angle$B$'$OD$'$ as the x- and y-axes. If 2α be the known angle between the lines then $\angle x$OB$'=\angle x$OD$'$ $=\alpha$. Any point on AB is G $(0, 0, c)$. The direction cosines of AB are $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$. Equations to AB are



$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\sin\alpha}=\frac{z-c}{0}, \text{ i.e., } y=x\tan\alpha, z=c.$$

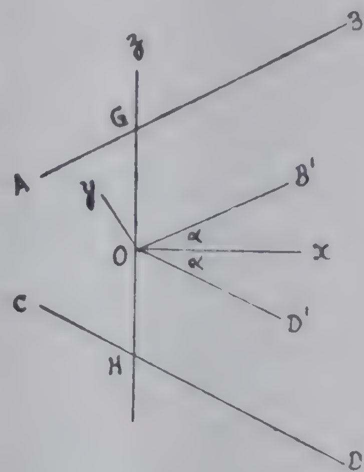
Similarly the equations to CD are

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{-\sin\alpha}=\frac{z+c}{0}, \text{ i.e., } y=-x\tan\alpha, z=-c.$$

Since AB is the intersection of the plane perpendicular to the z-plane at a distance c with the plane OGB we may say that the equations to AB are $z=c$, $y=x\tan\alpha$; similarly the equations to CD are $z=-c$, $y=-x\tan\alpha$. The co-ordinates of the general points on AB are $(r\cos\alpha, r\sin\alpha, c)$ and those on CD are $(r'\cos\alpha, -r'\sin\alpha, -c)$. Replacing $\tan\alpha$ by m we may write the equations to AB and CD as $y=mx$, $z=c$ and $y=-mx$, $z=-c$ respectively. The general points on these lines are (r, mr, c) and $(r', -mr', -c)$.

Examples. 1 Find the locus of the mid-points of a line of constant length whose extremities lie on two given skew lines.

೬.೬ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅತಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸರಳೀಕೃತ ರೂಪ.



AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅತಳರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. GH ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠದೂರವಾಗಿರಲಿ. GH=2 c ಎಂದಿರಲಿ. GH ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದು O ಎಂದು ಆರಿಸಬೇಕು. OG, z – ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಶೆ ಆಗಿರಲಿ. O ಮೂಲಕ GB, HD ಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ OB′, OD′ z– ಸಮತಲ. ಕಾರಣ GH (z – ಅಕ್ಷ) GB ಗೂ HD ಗೂ ಲಂಬವಾಗಿದೆ (ದತ್ತ) ∠B′ OD′ ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳನ್ನು x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕು. ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ 2 α ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ∠ xOB′ = ∠ xOD′ = α. AB ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು G (0, 0, c). AB ಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (cos α, sin α, 0) AB ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{z-c}{0} \text{ ಅಂದರೆ } y = x\tan\alpha,\ z = c.$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ CD ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{-\sin\alpha} = \frac{z+c}{0} \text{ ಅಂದರೆ } y = -x\tan\alpha,\ z = -c.$$

z – ಸಮತಲಕ್ಕೆ c ದೂರದಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸಮತಲ ಮತ್ತು OGB ಸಮತಲಗಳ ಛೇದನ AB ಆಗಿರುವುದರಿಂದ AB ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು $z=c$, $y = x\tan\alpha$. ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ CD ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು $z = -c$, $y = -x\tan\alpha$. AB ಮೇಲಣ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(r\cos\alpha, r\sin\alpha, c)$ ಮತ್ತು CD ಮೇಲಣ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(r'\cos\alpha', -r'\sin\alpha, -c)$. $\tan\alpha$ ದ ಬದಲು m ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ AB ಮತ್ತು CD ಸಮೀಕರಣಗಳು $y = mx$, $z = c$ ಮತ್ತು $y = -mx$, $z = -c$ ಆಗುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಣ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು (r, mr, c) ಮತ್ತು $(r', -mr', -c)$.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು. 1 ನಿಯತ ಉದ್ದವಿರುವ ಮತ್ತು ಕೊನೆಗಳು ಎರಡು ದತ್ತ ಅತಳ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

Let the equations to the given lines be $y = \pm mx$, $z = \pm c$. Let PQ be one position of the moving line. Let P be (r, mr, c) and Q $(r', -mr', -c)$. Then if $PQ = 2l$, $PQ^2 = (r-r')^2 + m^2(r+r')^2 + 4c^2 = 4l^2$.

If (x_1, y_1, z_1) be the mid-point of PQ we have $2x_1 = r + r'$, $2y_1 = m(r-r')$, $2z_1 = 0$.

∴ Locus of the mid-point of PQ is

$$4l^2 = \frac{4}{m^2} y^2 + m^2 4x^2 + 4c^2, \quad z = 0$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{m^4} = \frac{l^2}{m^2} - \frac{c^2}{m^2}, \quad z = 0$$

This is an ellipse in the z-plane. It is clear that the centre of this ellipse is the origin, *i.e.*, the mid-point of the S.D. and that the axes of the ellipse (which are the axes of coordinates) are equally inclined to the given lines.

2 Prove that the locus of a line which meets the lines $y = \pm mx$, $z = \pm c$ and the circle $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ is $c^2 m^2 (cy - mxz)^2 + c^2 (yz - cmx)^2 = a^2 m^2 (z^2 - c^2)^2$

$$\left.\begin{array}{l} y - mx + \lambda(z - c) = 0 \\ y + mx + \mu(z + c) = 0 \end{array}\right\}$$ This straight line meets both the given lines. It is given that it meets the circle $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

$$\therefore \quad \begin{array}{l} y - mx - \lambda c = 0 \\ y + mx + \mu c = 0 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = (\lambda - \mu)\frac{c}{2}, \quad x = (\lambda + \mu)\frac{c}{2m}$$

$$\therefore \quad (\lambda + \mu)^2 \frac{c^2}{4m^2} + (\lambda - \mu)^2 \frac{c^2}{4} = a^2$$

But $$\lambda = \frac{mx - y}{z - c}$$

$$\mu = -\frac{(mx + y)}{z + c}$$

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $y = \pm m x, z = \pm c$ ಆಗಿರಲಿ. ಚಲಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಒಂದು ಸ್ಥಾನ PQ ಆಗಿರಲಿ. P (r, mr, c), Q $(r', -mr', -c)$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ $PQ = 2l$ ಆಗಿದ್ದರೆ $PQ^2 = (r - r')^2 + m^2 (r + r')^2 + 4c^2 = 4l^2$.

(x_1, y_1, z_1) PQ ವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಆಗಿದ್ದರೆ

$$2x_1 = r + r', \; 2y_1 = m(r - r'), \; 2z_1 = 0$$

$\therefore$ PQ ವಿನ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$$4l^2 = \frac{4y^2}{m^2} + 4m^2x^2 + 4c^2, \; z = 0$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{m^4} = \frac{l^2}{m^2} - \frac{c^2}{m^2}, \quad z = 0$$

ಇದು z—ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ. ಈ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಮೂಲ ಬಿಂದು — ಅಂದರೆ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು — ಮತ್ತು ಅಕ್ಷಗಳು (ಇವು ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳು) ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿವೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

2 $y = \pm m x', z = \pm c$ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನೂ $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪಥ $c^2 m^2 (cy - mxz)^2 + c^2 (yz - cmx)^2 = a^2 m^2 (z^2 - c^2)^2$

$y - mx + \lambda(z - c) = 0 = y + mx + \mu(z + c)$ ಈ ಸರಳರೇಖೆ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳೆರಡನ್ನೂ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ವೃತ್ತ $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ ಯನ್ನೂ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆಂದು ದತ್ತವಾಗಿದೆ.

$$\therefore \; y - mx - \lambda c = 0$$

$$y + mx + \mu c = 0$$

$$y = (\lambda - \mu)\frac{c}{2}, \quad x = (\lambda + \mu)\frac{c}{2m}$$

$$\therefore \; (\lambda + \mu)^2 \frac{c^2}{4m^2} + (\lambda - \mu)^2 \frac{c^2}{4} = a^2$$

ಆದರೆ $\lambda = \dfrac{mx - y}{z - c}$

$$\mu = -\frac{(mx + y)}{z + c}$$

$$\therefore \quad \lambda+\mu = \frac{2\,(mxc - yz)}{z^2 - c^2}$$

$$\lambda-\mu = \frac{2\,(mxz - yc)}{z^2 - c^2}$$

$\therefore$ Locus is

$$\frac{c^2}{m^2}\;\frac{(mxc - yz)^2}{(z^2 - c^2)^2} + \frac{c^2\,(mxz - yc)^2}{(z^2 - c^2)^2} = a^2$$

$$\therefore \quad c^2 m^2\,(mxz - cy)^2 + c^2\,(mxc - yz)^2 = a^2 m^2\,(z^2 - c^2)^2$$

Exercises 6.1

Find the equations to the straight line passing through the following pairs of points :

(a) (3, −4, 5) (2, 0, 1)
(b) (−1, 2, −3), (0, 1, 6)
(c) (0, −1, 1), (3, −1, 2)

2 Find the equations to the straight line passing through (1, 2, − 1) and parallel to $2x-y+z-2 = 0 = x+y+3z+1$.

3 Explain analytically why no single straight line passing through a given point and perpendicular to a given straight line can be determined.

4 Find the equations to the two straight lines passing through (1, 2, 3) and intersecting the straight line

$$x-y+2z-2=0=x+2y-z-2$$

at a distance 2 from (1, 1, 1) on it.

5 Find the coordinates of the point where the line joining (1, −1, 2) and (2, 0, −2) meets the plane $x+y-2z+4 = 0$.

6 Find the distance of the point of intersection of the line

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{12}$$ and the plane $2x + y + z - 1 = 0$ from the point (1, 2, − 1).

$$\therefore \quad \lambda + \mu = 2 \frac{(m x c - y z)}{z^2 - c^2}$$

$$\lambda - \mu = 2 \frac{(m x z - y c)}{z^2 - c^2}$$

∴ ಬೇಕಾದ ಪಥ

$$c^2 m^2 (m x z - c y)^2 + c^2 (m x c - y z)^2 = a^2 m^2 (z^2 - c^2)^2$$

ಅಭ್ಯಾಸ ೬.೧

1 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಯುಗ್ಮಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

(*a*) (3, − 4, 5), (2, 0, 1)

(*b*) (− 1, 2, − 3), (0, 1, 6)

(*c*) (0, − 1, 1), (3, − 1, 2)

2 (1, 2, − 1) ಬಿಂದು ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $2x - y + z - 2 = 0 = x + y + 3z + 1$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

3 ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬ ವಾಗಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಏಕೆ ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಬೈಜಿಕವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ.

4 (1, 2, 3) ಬಿಂದು ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $x - y + 2z - 2 = 0 = x + 2y - z - 2$ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅದರ ಮೇಲಿರುವ (1, 1, 1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 2 ಏಕಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

5 (1, − 1, 2) ಮತ್ತು (2, 0, − 2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆ $x + y - 2z + 4 = 0$ ಸಮತಲವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6 $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y + 1}{4} = \dfrac{z + 2}{12}$ ಮತ್ತು

$2x + y + z - 1 = 0$ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು (1, 2, − 1) ಬಿಂದು ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು ?

7 Prove that the lines

$$\frac{x+2}{3} = -\frac{y}{2} = z-2 \quad \text{and}$$

$2-x=2y+5=\dfrac{z-3}{0}$ are coplanar; and find the equation to the plane containing them. Verify that (2, −3, 4) lies in the plane. Find the equations to the two lines in the plane which together with the given lines form a parallelogram whose diagonals meet at (2, −3, 4).

8 Find the coordinates of the foot of the perpendicular from P (8, 2, −4) to the line QQ′ given by $3(1-x)=y-2 = 2z+1$ and of P′ the image of P in QQ′. Also find the coordinates of Q and Q′ if PQP′Q′ is a square.

9 Prove that the line l given by $4x+3y+2z+12=0 = 6x-4y+3z-16$ lies in the plane $y+4=0$. Find the two lines in this plane passing through (−4, −4, 8) and inclined to the line l at 45°.

10 The line $\dfrac{x-\alpha}{l}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}$ lies in the plane $ax+by+cz+d=0$. Find the line through (α, β, γ) perpendicular to the given line and lying in the plane.

11 Find the locus of positions from where two given skew lines $y=\pm mx$, $z=\pm c$ appear to cut at right angles.

12 If P_1, P_2 are points one on each of the lines

$$\frac{x-\alpha_r}{l_r}=\frac{y-\beta_r}{m_r}=\frac{z-\gamma_r}{n_r}, \quad \gamma=1, 2$$

and if the direction cosines of P_1P_2 are l, m, n

7 $\frac{x+2}{3} = -\frac{y}{2} = z - 2$ ಮತ್ತು

$2 - x = 2y + 5 = \frac{z-3}{0}$ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಸಮತಲೀಯು ವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಅವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. (2, – 3, 4) ಈ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆಯೆಂದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ. ಈ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ, ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳೊಡನೆ (2, – 3, 4) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಸಂಧಿಸುವಂಥ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಇನ್ನೆರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

8 P (8, 2, – 4) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ QQ′ ಸರಳರೇಖೆ $3(1-x) = y - 2 = 2z + 1$ ಇದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. QQ′ ವನ್ನು ಕುರಿತು P ಯ ಬಿಂಬದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಿರಿ. P Q P′ Q′ ಒಂದು ಚೌಕವಾದಾಗ Q ಮತ್ತು Q′ ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

9 $4x + 3y + 2z + 12 = 0 = 6x - 4y + 3z - 16$ ಕೊಡುವ ಸರಳರೇಖೆ l, $y + 4 = 0$ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಈ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ (– 4, – 4, 8) ಬಿಂದು ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು l ಗೆ 45° ಬಾಗಿಕೊಂಡಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

10 $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ಸರಳರೇಖೆ $ax + by + cz + d = 0$ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿದೆ. (α, β, γ) ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ, ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

11 $y = \pm mx$, $z = \pm c$ ಎರಡು ದತ್ತ ಅತಲೀಯಗಳು. ಇವು 90° ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ತೋರುವ ಬಿಂದುಸ್ಥಾನಗಳ ಪಥ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

12 P_1, P_2 ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{x-\alpha_r}{l_r} = \frac{y-\beta_r}{m_r} = \frac{z-\gamma_r}{n_r}$, $r = 1, 2$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು. $P_1 P_2$ ರ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು l, m, n ಆಗಿದ್ದರೆ

$$P_1P_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_2 & \beta_1-\beta_2 & \gamma_1-\gamma_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \begin{Vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{Vmatrix}$$

Deduce (i) the shortest distance between these lines; (ii) the condition that they may be coplanar.

13 Show that the shortest distance between any two opposite edges of the tetrahedron bounded by the planes $y+z=0$, $z+x=0$, $x+y=0$, $x+y+z+3=0$ is $\sqrt{6}$ and that the lines of S.D. concur at (3, 3, 3).

14 The lines of greatest slope in the planes $4x+y-2z=0$ and $2x+y-z=0$ have their direction ratios (1, 2, 3) and (1, 2, 4) respectively. Find the equation to the horizontal plane through the origin.

15 The line $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ is rotated about the line $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{3}$. Different points of the first line describe different circles about the second line. Find the area of the smallest circle described.

16 Find the S.D. between the lines $\frac{x-7}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$ and $2x+5y-8z-52=0=3x-3y+2z+27$

17 The lines $x=mz+a$

$y=nz+b$

and $x=m'z+a'$

$y=n'z+b'$ intersect. Show that $\frac{a-a'}{b-b'}=\frac{m-m'}{n-n'}$.

$$P_1P_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 & \gamma_1 - \gamma_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರವೆಷ್ಟೆಂದು ನಿಗಮಿಸಿ ಅವು ಸಮತಲೀಯವಾಗಲು ನಿಯಮವನ್ನೂ ನಿಗಮಿಸಿ.

13 $y + z = 0$, $z + x = 0$, $x + y = 0$, $x + y + z + 3 = 0$ ಸಮತಲಗಳು ರಚಿಸುವ ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಎದುರು ಭುಜಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ $\sqrt{6}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಈ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರಗಳು (3. 3. 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14 $4x + y - 2z = 0$ ಮತ್ತು $2x + y - z = 0$ ಸಮತಲಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಓಟರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ (1, 2, 3) ಮತ್ತು (1, 2, 4). ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

15 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ ರೇಖೆಯನ್ನು $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$ ರೇಖೆಯ ಸುತ್ತಲೂ ಆವರ್ತಿಸಿದಾಗ ಮೊದಲಿನ ರೇಖೆಯ ವಿವಿಧ ಬಿಂದುಗಳು ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕುರಿತು ವಿವಿಧ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರೇಖಿಸುತ್ತವೆ. ಕನಿಷ್ಠ ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವೆಷ್ಟು ?

16 $\frac{x-7}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$ ಮತ್ತು $2x + 5y - 8z - 52 = 0 = 3x - 3y + 2z + 27$ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ ಪಡೆಯಿರಿ.

17 $x = mz + a$, $y = nz + b$ ಮತ್ತು $x = m'z + a'$, $y = n'z + b'$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. $\frac{a-a'}{b-b'} = \frac{m-m'}{n-n'}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18 Find the equations to the straight line through (1, 2, 3) and perpendicular to both the lines $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{4}$ and $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$.

19 Find the coordinates of the point in which the line joining (11, 0, −1) and (−9, 4, 5) is met by the perpendicular drawn to it through the origin.

20 Find the equations of the line through (−6, −4, −6) which cuts each of the lines

$$\frac{x}{2}=y=\frac{z}{3},\quad -x-2=\frac{y-1}{2}=-z-1$$

and the coordinates of the points in which it meets them.

21 Show that the S.D. between the axis of z and the line

$$ax+by+cz+d=a'x+b'y+c'z+d'$$

is $$\frac{cd'-c'd}{\sqrt{(ac'-a'c)^2+(bc'-b'c)^2}}$$

22 Show that the equation to the plane containing the line $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$ and parallel to the line $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, $y=0$ is $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0$ and if $2d$ is the S.D. prove that $d^{-2}=a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$.

23 A variable line intersects the x-axis and the curve $x=y$, $y^2=cz$ and is parallel to $x=0$. Prove that it generates $xy=cz$.

18 (1, 2, 3) ರ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ ಸರಳರೇಖೆಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

19 (11, 0, − 1) ಮತ್ತು (− 9, 4, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

20 (— 6, − 4, − 6) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಮತ್ತು $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ ಮತ್ತು $-x-2 = \frac{y-1}{2} = -z-1$ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ; ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

21 z − ಅಕ್ಷ, ಮತ್ತು $ax + by + cz + d = 0 = a'x + b'y + c'z + d'$ ಸರಳರೇಖೆ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ

$$\frac{cd' - c'd}{\sqrt{(ac' - a'c)^2 + (bc' - b'c)^2}}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

22 $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,\ x = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಮತ್ತು $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1,\ y = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣ $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ $2d$ ಆದರೆ $d^{-2} = a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

23 ಒಂದು ಚರಸರಳರೇಖೆ x — ಅಕ್ಷವನ್ನೂ, $x = y,\ y^2 = cz$ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನೂ ಸಂಧಿಸುವುದು ; ಮತ್ತು $x = 0$ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಆ ಸರಳರೇಖೆ $xy = cz$ ಯನ್ನು ಜನಕೀಕರಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

24 Prove that the locus of a line which meets two lines $y = \pm mx$, $z = \pm c$ and circle $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ is

$$c^2m^2(cy - mzx)^2 + c^2(yz - cmx)^2$$
$$= a^2m^2(z^2 - c^2)$$

25 Show that the S.D. between the lines

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma_1}, \quad \frac{x - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y - y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma_2}$$

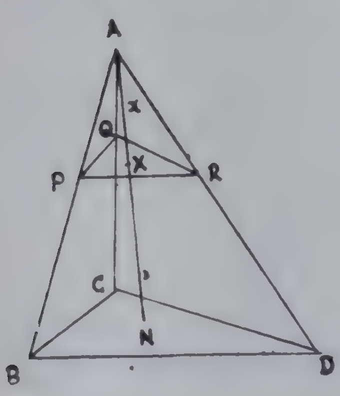
meets the first line in a point whose distance from the point (x_1, y_1, z_1) is

$$\frac{\sum (x_1 - x_2)(\cos \alpha_1 - \cos \theta \cos \alpha_2)}{\sin^2 \theta}$$

where θ is the angle between the lines.

6.7 Volume of a tetrahedron. A tetrahedron is a three-dimensional figure bounded by four triangles having four common points among themselves. These points are the four vertices of the tetrahedron; the bounding triangles are called the faces of the tetrahedron. The common lines between the triangular faces are the edges. These are six edges for a tetrahedron.

To calculate the volume of a given tetrahedron we dissect it into thin continuous slices by planes drawn parallel to one of its faces and take their aggregate. Let PQR be one such slice—it is a triangle similar and similarly situated to $\triangle$BCD. Draw AX perpendicular to it and produce it to cut $\triangle$BCD in N. Then AN is perpendicular to $\triangle$BCD also. Let AX $= x$.



24 $y = \pm m x$, $z = \pm c$ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನೂ $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $c^2 m^2 (c y - m z x)^2 + c^2 (y z - c m x)^2 = a^2 m^2 (z^2 - c^2)$

25 $\dfrac{x - x_1}{\cos \alpha_1} = \dfrac{y - y_1}{\cos \beta_1} = \dfrac{z - z_1}{\cos \gamma_1}$ ಮತ್ತು

$$\frac{x - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y - y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma_2}$$

ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ ಮೊದಲಿನ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು (x_1, y_1, z_1) ಬಿಂದು ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

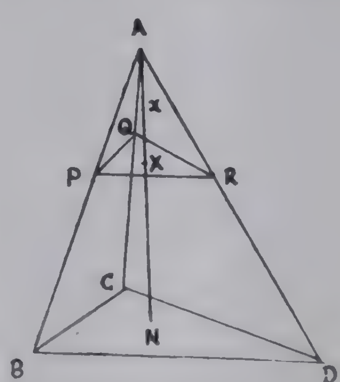
$$\frac{\sum (x_1 - x_2)\ (\cos \alpha_1 - \cos \theta \cos \alpha_2)}{\sin^2 \theta}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. θ ಆ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ.

೬.೭ ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಘನಗಾತ್ರ

ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ನಾಲ್ಕು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿರುವಂತೆ ಆವೃತಿಸುವ ಮೂರು ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಯ ಹೆಸರು ಚತುಷ್ಫಲಕ. ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಶೃಂಗಗಳು : ಆವೃತಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಹೆಸರು ಫಲಕಗಳು. ಈ ತ್ರಿಭುಜ ಫಲಕಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೇಖೆಗಳು ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಅಂಚುಗಳು. ಇಂಥ 6 ಅಂಚುಗಳಿವೆ.

ಒಂದು ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಘನಗಾತ್ರವನ್ನು ಗಣಿಸಲು ಅದರ ಒಂದು ಫಲಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಸಮತಲಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು ತೆಳುವಾದ ಪದರಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ಸಮರೂಪ ಮತ್ತು ಸಮಾರೋಪವಾಗಿ ಇರುವ ತೆಳು ತ್ರಿಭುಜಪದರಗಳ ಮೊತ್ತ ಚತುಷ್ಫಲಕ. PQR ಇಂಥ ಒಂದು ಪದರವಾಗಿರಲಿ. ಅದು $\triangle$ BCD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಸಮರೂಪವಾಗಿಯೂ ಇದೆ. AX ನ್ನು ಇದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದು, $\triangle$ BCD ಯನ್ನು N ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಆಗ AN $\triangle$BCD ಗೂ ಲಂಬ. $AX = x$ ಆಗಿರಲಿ.



Then $\delta V = \triangle PQR \,.\, \delta x \;=\; \dfrac{\triangle PQR}{\triangle BCD} \cdot \triangle BCD.\ \delta x$

$$= \frac{AX^2}{AN^2} \cdot \delta x \cdot S = \frac{Sx^2\,\delta x}{p^2}$$

where p = AN, altitude from A on $\triangle$ BCD. S = area of $\triangle$ BCD.

$$\therefore \quad V = \frac{S}{p^2}\int_0^p x^2\,dx = \frac{1}{3}\ Sp$$

Thus the volume of a tetrahedron is equal to $\frac{1}{3}$ base $\times$ altitude.

To calculate the volume of a tetrahedron whose vertices are $(x_r,\ y_r,\ z_r)$, $r = 1, 2, 3, 4$.

Now $V = \frac{1}{3}\, p\ \triangle$ BCD, where V is the required volume, p the length of the altitude from A on the opposite face $\triangle$ BCD. Equation to $\triangle$ BCD is

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore x \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Now $\begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times$ projection of $\triangle$ BCD on the x-plane

$= 2\ \triangle_x$ say.

$\therefore$ Equation to $\triangle$ BCD is

$$2\,(x\,\triangle_x + y\,\triangle_y + z\,\triangle_z) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

ಆಗ $\delta V = \triangle PQR \cdot \delta x = \frac{\triangle PQR}{\triangle BCD} \triangle BCD \cdot \delta x$

$$= \frac{AX^2}{AN^2} \cdot \delta x \cdot S = \frac{S\, x^2\, \delta x}{p^2}$$

ಇಲ್ಲಿ $p = AN$. A ಯಿಂದ $\triangle BCD$ ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ. $S = \triangle BCD$ ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.

$$\therefore \quad V = \frac{S}{p^2}\int_0^p x^2\, dx = \frac{1}{3} Sp$$

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಘನಗಾತ್ರ $= \frac{1}{3}$ ತಳ × ಲಂಬ

(x_r, y_r, z_r), $r = 1, 2, 3, 4$ ಶೃಂಗಗಳಿರುವ ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಘನಗಾತ್ರದ ಗಣನೆ.

$V = \frac{1}{3} p \triangle BCD$, V ಬೇಕಾದ ಘನಗಾತ್ರ ; A ಶೃಂಗದಿಂದ $\triangle BCD$ ಗೆ (ಎದುರು ಫಲಕ) ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ p. $\triangle$ BCD ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore x \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times x-$ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ $\triangle$ BCD ಯ ವಿಕ್ಷೇಪ $= 2\triangle_x$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore$ BCD ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$2\,(x\,\triangle_x + y\,\triangle_y + z\,\triangle_1) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad p = \frac{2\,(x_1 \Delta_x + y_1 \Delta_y + z_1 \Delta_z) - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}{2\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}}$$

But $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 = \Delta^2$, where $\Delta = \Delta$ BCD

(see § 5.7 Ex. 5)

$$\therefore \quad 2p\,\Delta\,\text{BCD} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\,p\,\Delta\,\text{BCD} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Note. 1 If one vertex is the origin and the other vertices are (x_r, y_r, z_r), $r = 1, 2, 3$ the volume of the tetrahedron is

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

The general result can be rewritten as follows:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 & 0 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 & 0 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\therefore \quad p = \frac{2(x_1 \Delta_x + y_1 \Delta_y + z_1 \Delta_z) - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}{2\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}}$$

ಆದರೆ $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta^2 = \Delta^2, \quad \Delta = \Delta BCD.$

(§ 5. 7, ಉದಾ 5 ನೋಡಿ)

$$\therefore \quad 2\, p\, \Delta BCD = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\, p \quad \Delta BCD = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

ಸೂಚನೆ : 1 ಒಂದು ಶೃಂಗ ಮೂಲಬಿಂದು, ಉಳಿದ ಶೃಂಗಗಳು (x_r, y_r, z_r), $r = 1, 2, 3$ ಆಗಿದ್ದರೆ

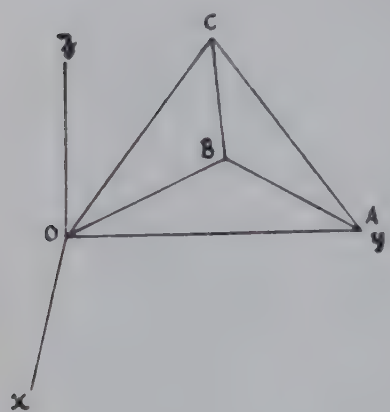
$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2 ಮೇಲೆ ಪಡೆದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬೇರೆ ಒಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 & 0 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 & 0 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}$$

Examples. 1 The lengths of a pair of skew sides of a tetrahedron are a and b; d is the S.D. and θ the angle between them. Prove that $V = \dfrac{abd \sin\theta}{6}$.



Choose one vertex as the origin; a face through it as the z-plane and an edge in it as the y-axis. Then the coordinates of the vertices are
O $(0, 0, 0)$, A $(0, x_1, 0)$,
B $(x_2, y_2, 0)$, C (x_3, y_3, z_3)

$$\therefore \quad V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} x_1 x_2 z_3$$

Now let OA $= a$, BC $= b$ and let the angle between OA and BC be θ. Then $x_1 = a$, $b^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + z_3^2$. The direction cosines of OA are $(0, 1, 0)$ and those of BC are

$[k(x_3 - x_2), k(y_3 - y_2), kz_3]$, where

$$k^2 [(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + z_3^2] = 1$$

$$\therefore \quad k^2 b^2 = 1$$

$$k = \frac{1}{b}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}.$$

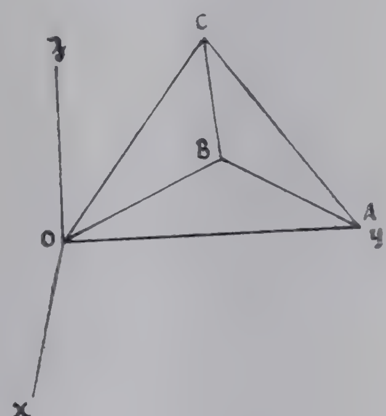
ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಒಂದು ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಅತಲೀಯ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ a, b; d ಕನಿಷ್ಠ ದೂರ ಮತ್ತು θ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ.

$V = \dfrac{abd \sin\theta}{6}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಒಂದು ಶೃಂಗ ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ: ಅದರ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವ ಒಂದು ಫಲಕ z—ಸಮತಲ ಮತ್ತು ಈ ಫಲಕದ ಒಂದು ಅಂಚು y—ಅಕ್ಷ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಶೃಂಗ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು O (0,0,0),

A $(0, x_1, 0)$, B $(x_2, y_2, 0)$,
C (x_3, y_3, z_3),



$$\therefore V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} x_1 \; x_2 \; z_3$$

OA $= a$, BC $= b$ ಮತ್ತು OA, BC ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ θ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ $x_1 = a$, $b^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + z_3^2$ OA ಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು, (0, 1, 0); BC ಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು $[k(x_3 - x_2), k(y_3 - y_2), kz_3]$ ಇಲ್ಲಿ

$$k^2 [(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + z_3^2] = 1$$

$$\therefore \; k^2 b^2 = 1$$

$$k = \frac{1}{b}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{y_3 - y_2}{b}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{b^2 - (y_3 - y_2)^2}}{b}$$

Now d = S.D. between OA and BC

$$= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (x_3 - x_2)k & (y_3 - y_2)k & z_3 k \end{vmatrix} \div \sqrt{(z_3 k)^2 + (x_3 - x_2)^2 k^2}$$

$$= \frac{x_2 z_3 k}{k\sqrt{b^2 - (y_2 - y_3)^2}} = \frac{x_1 x_2 z_3}{x_1 b \sin\theta} = \frac{6V}{ab\sin\theta}$$

$$\therefore \quad V = \frac{abd \sin\theta}{6}.$$

2 Find the volume of the tetrahedron formed by planes whose equations are $y + z = 0$, $z + x = 0$, $x + y = 0$, $x + y + z = 1$.

The four vertices are obtained by solving between these 4 equations taken 3 at a time. They are (0, 0, 0), (−1, 1, 1), (1, −1, 1), (1, 1, −1).

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}.$$

3 Show that the volume of the tetrahedran whose faces are

$$a_r x + b_r y + c_r z + d_r = 0, \quad r = 1, 2, 3, 4$$

೭.೩. ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ AB ಆಗಿ, ಗೋಳದ ಮೇಲೆ P ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೆ, APB ಲಂಬಕೋನವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಗೋಳಕ್ಕೆ APB ತಳದಿಂದ ಛೇದ AB ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

$A(x_1, y_1, z_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2, z_2)$ **ಬಿಂದುಗಳು ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿಕೆ.**

ಗೋಳದ ಮೇಲೆ $P(x, y, z)$ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೆ, APB ಲಂಬಕೋನ.

AP, BP ಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $(x-x_1) : (y-y_1) : (z-z_1)$ ಮತ್ತು $(x-x_2) : (y-y_2) : (z-z_2)$. ಲಂಬತ್ವಕ್ಕೆ ನಿರ್ಬಂಧ

$$(x-x_1)\ (x-x_2) + (y-y_1)\ (y-y_2) + (z-z_1)\ (z-z_2) = 0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. AB **ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣವೇ ಇದು.**

೭.೪ ಸ್ಪರ್ಶತಳ. ಒಂದು ಮೈಯನ್ನು ಎರಡು ಐಕ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ C ಆಗಿರಲಿ. ಗೋಳದ ಮೇಲೆ P ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು, PT ಗೋಳಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಆಗಿರಲಿ. ಇದು ಗೋಳದ CPT ತಳಛೇದಕ್ಕೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ. ಈ ತಳಛೇದ ವೃತ್ತವಾದುದರಿಂದ CP ರೇಖೆ PT ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಗೋಳಕ್ಕೆ P ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ತ್ರಿಜ್ಯ CP ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಒಂದು ತಳದಲ್ಲಿದ್ದು ಈ ತಳಕ್ಕೆ P ನಲ್ಲಿ ಲಂಬ PC ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ತಳಕ್ಕೆ P ನಲ್ಲಿ ಗೋಳದ ಸ್ಪರ್ಶತಳವೆಂದೂ PC ರೇಖೆಗೆ ಗೋಳಕ್ಕೆ P ನಲ್ಲಿ ಲಂಬವೆಂದೂ ಹೆಸರು. ಆದ್ದರಿಂದ ಗೋಳಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ತ್ರಿಜ್ಯ.

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ **ಗೋಳಕ್ಕೆ** $P(x_1, y_1, z_1)$ **ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶತಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿಕೆ.**

ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ $(-u, -v, -w)$ ಆದ್ದರಿಂದ ಲಂಬ CP ಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು $(x_1+u) : (y_1+v) : (z_1+w)$. ಆದ್ದರಿಂದ, P ಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶತಳದ ಸಮೀಕರಣ

$$x(x_1 + u) + y(y_1 + v) + z(z_1 + w) = k$$

where k is a suitable constant.

This plane passes through P. Hence

$$k = x_1(x_1 + u) + y_1(y_1 + v) + z_1(z_1 + w)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + ux_1 + vy_1 + wz_1$$

But since P lies on the sphere

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d = 0$$
$$\therefore \quad k = -(ux_1 + vy_1 + wz_1 + d)$$

The equation of the tangent plane at $P(x_1, y_1, z_1)$ is therefore
$x(x_1 + u) + y(y_1 + v) + z(z_1 + w) - (ux_1 + vy_1 + wz_1 + d) = 0.$

7.5 Length of a tangent from any point $P(x_1, y_1, z_1)$.

If P be now a point outside the sphere and PT a tangent to the sphere the section of the sphere by the plane CPT is a circle having TP as the tangent at T

$$\therefore \quad TP^2 = CP^2 - CT^2$$
$$= (-u - x_1)^2 + (-v - y_1)^2 + (-w - z_1)^2$$
$$- (u^2 + v^2 + w^2 - d)$$
$$\therefore \quad PT^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d$$

This expression is called the **power** of the point P w.r.t. the sphere. It is positive when P is outside the sphere and negative when P is inside the sphere since the tangents are now imaginary. An infinite number of tangents can be drawn from P to the sphere and these are all of equal length.

The student will have noticed the analogy between results connected with the circle and results connected with the sphere.

7.6 The radical plane of two spheres. The locus of a point tangents from which to one sphere are equal in length to the tangents to the other sphere is a plane. This plane is called the **radical plane** of the two spheres.

$x(x_1+u) + y(y_1+v) + z(z_1+w) = k$, ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಸೂಕ್ತ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ. ತಳ P ಮೂಲಕ ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$$k = x_1(x_1+u) + y_1(y_1+v) + z_1(z_1+w)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + ux_1 + vy_1 + wz_1$$

ಆದರೆ, P ಗೋಳದ ಮೇಲಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d_1 = 0$$
$$\therefore k = -(ux_1 + vy_1 + wz_1 + d)$$

$\therefore$ P (x_1, y_1, z_1) ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶತಳದ ಸಮೀಕರಣ

$$x(x_1+u) + y(y_1+v) + z(z_1+w) + (ux_1 + vy_1 + wz_1 + d) = 0$$

೭.೫ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು P (x_1, y_1, z_1) ರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದ

ಗೋಳದ ಮೇಲಿಲ್ಲದ ಬಿಂದುವೊಂದು P ಆಗಿ, ಗೋಳಕ್ಕೆ PT ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾದರೆ, ಗೋಳದ CPT ತಳಛೇದ ಒಂದು ವೃತ್ತ. ಅದಕ್ಕೆ T ಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ TP.

$$\therefore TP^2 = CP^2 - CT^2$$
$$= (-u-x_1)^2 + (-v-y_1)^2 + (-w-z_1)^2 - (u^2+v^2+w^2-d)$$
$$\therefore PT^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d$$

ಈ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಗೋಳಕ್ಕೆ P ಯ **ಸಾಮರ್ಥ್ಯ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. P ಗೋಳದ ಹೊರಗಡೆ ಇದ್ದರೆ ಇದು ಧನ, ಒಳಗಿದ್ದರೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಅವಾಸ್ತವವಾದ್ದರಿಂದ ಋಣ. P ಯಿಂದ ಗೋಳಕ್ಕೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಉದ್ದದವು,

ವೃತ್ತದ ಗುಣಗಳಿಗೂ ಗೋಳದ ಗುಣಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಸಾಮ್ಯವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಗಮನಿಸಬಹು.

೭.೬ ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ಮೂಲ ತಳ. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ಗೋಳಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಉದ್ದದವುಗಳಾದರೆ, ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಒಂದು ತಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ತಳಕ್ಕೆ ಗೋಳಗಳ **ಮೂಲತಳ** ಎಂದು ಹೆಸರು.

Let $S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_2z + d_1 = 0$

and $S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$

be the equations of two spheres. Let P be any point (x', y', z') the tangents from which to S_1 and S_2 are equal.

$$\therefore \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2u_1x' + 2v_1y' + 2w_1z' + d_1 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2u_2x' + 2v_2y' + 2w_2z' + d_2$$

$$\therefore \quad 2(u_1 - u_2)x' + 2(v_1 - v_2)y' + 2(w_1 - w_2)z' + (d_1 - d_2) = 0$$

The locus of (x', y', z') is therefore the plane

$$2(u_1 - u_2)x + 2(v_1 - v_2)y + 2(w_1 - w_2)z + (d_1 - d_2) = 0$$

This may be briefly written $S_1 - S_2 = 0$.

This is the equation of the radical plane of the two spheres.

If $S_1 = 0$ and $S_2 = 0$ be any two surfaces the equation $S_1 + \lambda S_2 = 0$ denotes a surface passing through the curve of intersection of the given surfaces. The student is familiar with a similar result in plane geometry and the proof of the present result is on similar lines.

In the case of the spheres S_1 and S_2 the equation $S_1 - S_2 = 0$ denotes a plane. Hence, **two spheres intersect along a circle the section of either sphere by the radical plane.**

Other corollaries

Cor. 1. $(u_1-u_2) : (v_1-v_2) : (w_1-w_2)$ are the directions of the line joining the centres of the spheres. Hence, **the line joining the centres of the spheres is normal to the radical plane.**

Cor. 2. **The radical planes of three spheres, taken two by two, intersect along a line.**

ಗೋಳಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1 x + 2v_1 y + 2w_1 z + d_1 = 0$$
$$S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2 z + 2v_2 y + 2w_2 z + d_2 = 0$$

ಆಗಿರಲಿ.

P (x', y', z') ಬಿಂದುವಿನಿಂದ S_1 ಕ್ಕೂ S_2 ಕ್ಕೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore \; x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2u_1 x' + 2v_1 y' + 2w_1 z' + d_1$$
$$= x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2u_2 x' + 2v_2 y' + 2w_2 z' + d_2$$
$$\therefore \; 2(u_1 - u_2)x' + 2(v_1 - v_2)y' + 2(w_1 - w_2)z' + (d_1 - d_2) = 0$$

$\therefore$ (x', y', z') ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ

$$2(u_1 - u_2)x + 2(v_1 - v_2)y + 2(w_1 - w_2)z + (d_1 - d_2) = 0$$

ಎಂಬ ತಳ. ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ $S_1 - S_2 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಗೋಳಗಳ ಮೂಲತಳದ ಸಮೀಕರಣವಿದು.

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಮೈಗಳಾದರೆ $S_1 + \lambda S_2 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ಈ ಮೈಗಳ ಸಂಧಿ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಬೇರೊಂದು ಮೈ. ಏಕತಳ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಹೋಲುವ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಬಲ್ಲ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸಾಧನೆಯೂ ಅದರಂತೆಯೇ ಲಭಿಸುವುದು.

S_1, S_2 ಗೋಳಗಳಾದಾಗ $S_1 - S_2 = 0$ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ತಳವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಎರಡು ಗೋಳಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ವೃತ್ತ ಎರಡು ಗೋಳಗಳಿಗೆ ಮೂಲತಳದ ಛೇದ.**

ಇತರ ಅನುಮಿತಗಳು

ಅನುಮಿತ 1. ಗೋಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು $(u_1 - u_2) : (v_1 - v_2) : (w_1 - w_2)$ ಆದ್ದರಿಂದ,

ಗೋಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆ ಮೂಲತಳಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅನುಮಿತ 2. **ಮೂರು ಗೋಳಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡೆರಡರ ಮೂಲ ತಳಗಳು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.**

If S_1, S_2, S_3 are the spheres, the radical planes meet along the line $S_1 = S_2 = S_3$.

Cor. 3. **The radical planes of four spheres taken two by two are concurrent at a point.**

If S_r, $r = 1, 2, 3, 4$ are the four spheres, the point of concurrence is the point of intersection of the three planes

$$S_1 = S_2,\ S_2 = S_3,\ S_3 = S_4.$$

7.7 Examples

1 Find the centre and radius of the sphere

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 8y + 10z - 4 = 0$$

[Divide by 3]

2 Prove that one and only one sphere passes through four points which do not all lie in the same plane.

If (x_r, y_r, z_r), $r = 1, 2, 3, 4$ are the four points the equation of the sphere is

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3 Find the centre and radius of the circle

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49,\ 2x - 5y + 4z = 45$$

The centre C of the circle is the foot of the normal on the given plane from the centre of the sphere. The equations of the normal are $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z}{4} = r$. Where this meets the plane we have $2(2r) - 5(-5r) + 4(4r) = 45$

$\therefore\ r = 1 \quad \therefore\ C \equiv (2, -5, 4)$

Radius of the circle $= \sqrt{49 - OC^2} = \sqrt{2}$.

4 Find the equation of the sphere passing through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $ax + by + cz + d = 0$ and passing through the point (α, β, γ).

ಗೋಳಗಳು S_1, S_2, S_3 ಆದರೆ ಮೂಲತಳಗಳು $S_1 = S_2 = S_3$ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಅನುಮಿತ ೩. **ನಾಲ್ಕು ಗೋಳಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡೆರಡರ ಮೂಲತಳಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಪಾತ ಹೊಂದುತ್ತವೆ.**

ಗೋಳಗಳು S_r, $r = 1, 2, 3, 4$ ಆದರೆ ಸಂಪಾತಬಿಂದು $S_1 = S_2$, $S_2 = S_3$, $S_3 = S_4$ ಈ ಮೂರು ತಳಗಳ ಸಂಧಿಸ್ಥಾನ.

೭.೭ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 $3x^2+3y^2+3z^2+6x+8y+10z-4=0$ ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ಪಡೆಯಿರಿ.

(ಮೊದಲು ಮೂರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ)

2 ನಾಲ್ಕೂ ಒಂದೇ ತಳದಲ್ಲಿಲ್ಲದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ಗೋಳ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಬಿಂದುಗಳು (x_r, y_r, z_r), $r = 1, 2, 3, 4$ ಆದರೆ ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3 $x^2+y^2+z^2=49$, $2x-5y+4z=45$ ಎಂಬ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ಪಡೆಯಿರಿ.

ವೃತ್ತ ತಳದ ಮೇಲೆ ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದರೆ ಲಂಬದ ಬುಡವೇ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ. ಲಂಬದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$\frac{x}{2} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{4} = r$. ಇದು ತಳವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವೆಡೆ,

$$2(2r) - 5(-5r) + 4(4r) = 45 \quad \therefore r = 1$$

$\therefore$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ $C \equiv (2, -5, 4)$

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \sqrt{49 - OC^2} = 2$

4. $x^2+y^2+z^2=r^2$, $ax+by+cz+d=0$ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕವೂ (α, β, γ) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೂ ಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

[The equation of any sphere through the circle is of the form $(x^2+y^2+z^2-r^2)+\lambda\,(ax+by+cz+d)=0$]

5 Find the condition that two spheres

$$x^2+y^2+z^2+2u_1x+2v_1y+2w_1z+d_1=0$$

$$x^2+y^2+z^2+2u_2x+2v_2y+2w_2z+d_2=0$$

intersect orthogonally.

The angle between two surfaces at a point of intersection is defined as the angle between their normals. If the spheres intersect at a point P orthogonally the normals at P to the two spheres are the corresponding radii PC_1, PC_2 where C_1, C_2 are the centres of the spheres. Hence $C_1\hat{P}C_2=90^\circ$.

$\therefore$ $C_1C_2^2=C_1P^2+C_2P^2$. Simplifying we obtain the condition

$$2u_1u_2+2v_1v_2+2w_1w_2=d_1+d_2$$

It is clear that if two spheres intersect orthogonally at one point they do so at all points of their common section.

6 Determine the conditions that the two circles

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0,\; lx+my+nz+p=0$$

$$x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0,$$

$$l'x+m'y+n'z+d'=0$$

lie on the same sphere.

Briefly calling the equation as $S_1=0$, $P_1=0$ and $S_2=0$, $P_2=0$ the two equations $S_1+\lambda P_1=0$ and $S_2+\mu P_2=0$ must be the same for suitable values of λ and μ. Hence

[ದತ್ತ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಯಾವುದೇ ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣ $(x^2+y^2+z^2-r^2) + \lambda(ax+by+cz+d) = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.]

5 $x^2+y^2+z^2+2u_1x+2v_1y+2w_1z+d_1 = 0$

$x^2+y^2+z^2+2u_2x+2v_2y+2w_2z+d_2 = 0$

ಎಂಬ ಗೋಳಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಎರಡು ಮೈಗಳಿಗೆ ಸಂಧಿಸ್ಥಾನವೊಂದರಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಲಂಬಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮೈಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನವೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ದತ್ತ ಗೋಳಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ P ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಗಳು PC_1, PC_2 ಆಗುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ C_1, C_2 ಗೋಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ $C_1\hat{P}C_2 = 90^\circ$

$\therefore\ C_1C_2^2 = C_1P^2+C_2P^2$

ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದ ಮೇಲೆ,

$2u_1u_2+2v_1v_2+2w_1w_2 = d_1+d_2$

ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಗೋಳಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಛೇದರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲ ಈ ಗುಣವಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಮೇಲಣ ನಿರ್ಬಂಧದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

6 $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d = 0,\ lx+my+nz+p = 0$

$x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d' = 0,\ l'x+m'y+n'z+p' = 0$

ಎಂಬ ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದೇ ಗೋಳದ ಮೇಲಿರಲು ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ $S_1 = 0$, $P_1 = 0$ ಮತ್ತು $S_2 = 0$, $P_2 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. λ, μ ಗಳ ತಕ್ಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $S_1+\lambda P_1 = 0$ ಮತ್ತು $S_2+\mu P_2 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$2(u-u')+\lambda l-\mu l'=0$$
$$2(v-v')+\lambda m-\mu m'=0$$
$$2(w-w')+\lambda n-\mu n'=0$$
$$(d-d')+\lambda p-\mu p'=0$$

We can eliminate λ and μ from any three of these equations Hence the matrix

$$\begin{pmatrix} 2(u-u') & 2(v-v') & 2(w-w') & (d-d') \\ l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \end{pmatrix}$$

is of rank 2.

The problem admits of a neat geometrical discussion. Suppose S is the sphere containing both the circles. Let the line of intersection of the planes $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ meet S in L and M. Hence L, M lie on both the circles. *i.e.,* the circles intersect in two points. Conversely if two circles C_1 and C_2 in different planes intersect in two points, say L and M, then the circles lie on a sphere. For take another point Q on C_1 and R on C_2. The sphere passing through the four points L, M, Q, R contains both the circles. Hence, **the necessary and sufficient condition that two circles (in different planes) lie on the same sphere is that the circles intersect in two points.**

Exercises

1 Find the equation of the sphere through the points (0, 0, 0), (1, 0, − 1), (0, − 1, 1), (− 1, 1, 1).

2 The plane $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ cuts the coordinate axes at A, B and C. Write down the equations of the circle ABC and the coordinates of its centre.

$$2(u-u') + \lambda l - \mu l' = 0$$
$$2(v-v') + \lambda m - \mu m' = 0$$
$$2(w-w') + \lambda n - \mu n' = 0$$
$$(d-d') + \lambda p - \mu p' = 0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು, λ, μ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸ ಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\begin{pmatrix} 2(u-u') & 2(v-v') & 2(w-w') & d-d' \\ l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \end{pmatrix}$$

ಎಂಬ ಮಾತೃಕೆಯ ದರ್ಜೆ 2.

ಅಂದವಾದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಗೋಳ S ಆಗಿರಲಿ. $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ ತಳಗಳ ಸಂಧಿರೇಖೆ S ನ್ನು L, M ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂದು ಗಳು ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಎಂದರೆ ದತ್ತ ವೃತ್ತಗಳು ಎರಡು ಬಿಂದು ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತಳಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತ ಗಳು C_1 ಮತ್ತು C_2 ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ, L, M ಎನ್ನಿ, ಸಂಧಿಸಿದರೆ ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ C_1 ರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು Q ವನ್ನೂ C_2 ರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು R ನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. L, M, Q, R ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಗೋಳಗಳು ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತಳಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದೇ ಗೋಳದ ಮೇಲಿರಲು ಬೇಕಾದ ಮತ್ತು ಸಾಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧವೇನೆಂದರೆ ವೃತ್ತಗಳು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಬೇಕು.**

ಅಭ್ಯಾಸಗಳು

1 (0, 0, 0), (1, 0, −1), (0, −1, 1), (−1, 1, 1) ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

2 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ ತಳ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು A, B, C ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. A B C ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ ಅದರ ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯಿರಿ.

3 A plane passes through a fixed point (f, g, h) and cuts the coordinate axes in A, B, C. Show that the locus of the centre of the sphere OABC is the surface

$$\frac{f}{x} + \frac{g}{y} + \frac{h}{z} = 2.$$

4 Determine the condition that the plane

$$lx + my + nz + p = 0$$

touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ [Length of $\perp r$ from the centre on the plane = radius.]

5 If two spheres touch the distance between their centres is equal to the sum or difference of the radii.

6 The plane section common to two spheres is perpendicular to the line joining their centres.

7 Find the coordinates of the centre of the circle common to the spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 5 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 7 = 0$.

8 The equations of any two spheres can be written in the form

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + d = 0, x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + d = 0.$$

[Choose the line of centres as the x-axis and the radical plane as $x = 0$. The system of spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + d = 0$ where u varies but d is the same for all spheres is a **coaxal** system the radical plane being the same for any two spheres]

9 If S_1, S_2 are two spheres $S_1 + \lambda S_2 = 0$ is the equation of a coaxal system.

10 The locus of a point the tangent from which to two given spheres are in a fixed ratio is a sphere coaxal with the given spheres.

3 ಒಂದು ತಳ (f, g, h) ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು A, B, C ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. O A B C ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದ ಪಥ $\frac{f}{x} + \frac{g}{y} + \frac{h}{z} = 2$ ಎಂಬ ಮೈ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ಗೋಳವನ್ನು $lx + my + nz + p = 0$ ತಳ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

[ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಮೈಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ = ತ್ರಿಜ್ಯ]

5 ಎರಡು ಗೋಳಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಣದೂರ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತ ಇಲ್ಲವೇ ಅಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6 ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಛೇದತಳ ಕೇಂದ್ರರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

7 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 5 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 7 = 0$ ಗೋಳಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

8 ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು
$x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1 x + d = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2 x + d = 0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

[ಕೇಂದ್ರರೇಖೆಯನ್ನು x—ಅಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ಮೂಲತಳವನ್ನು $x = 0$ ಆಗಿಯೂ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಎಲ್ಲ ಗೋಳಗಳಿಗೂ d ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದು u ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಗುವ $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + d = 0$ ಎಂಬ ಗೋಳ ವ್ಯೂಹಕ್ಕೆ **ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯೂಹ** ವೆಂದು ಹೆಸರು. ಇದರ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗೋಳಗಳಿಗೆ ಮೂಲತಳ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.]

9 S_1, S_2 ಎರಡು ಗೋಳಗಳಾದರೆ, $S_1 + \lambda S_2 = 0$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯೂಹದ ಸಮೀಕರಣ.

10 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ದತ್ತ ವ್ಯೂಹಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಾದರೆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ದತ್ತ ಗೋಳಗಳೊಡನೆ ಸಹಮೂಲಾಕ್ಷವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳ.

11 Prove that the coaxal system in Ex. 8 has two spheres of zero radius **(limiting points)**, whose coordinates are $(\pm\sqrt{d}, 0, 0)$.

12 Prove that the equation of any sphere through the limiting points of Ex. 11 is of the form $x^2 + y^2 + z^2 + 2By + 2Cz - d = 0$ and that this cuts all the coaxal spheres orthogonally.

13 Find the equations to the two spheres which pass through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ and touch the plane $4x + 3y = 15$.

14 Find the locus of the centres of spheres passing through the origin and touching the plane $x + y + z = 5$.

15 OA, OB, OC are mutually perpendicular lines through the origin and their direction cosines are (l_r, m_r, n_r), $r = 1, 2, 3$ respectively. If $OA = a$, OB b, $OC = c$ prove that the equation to the sphere OABC is

$$x^2 + y^2 + z^2 - x(al_1 + bl_2 + cl_3) - y(am_1 + bm_2 + cm_3) - z(an_1 + bn_2 + cn_3) = 0.$$

16 Prove that the circles

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z - 6 = 0$$
$$3x + 2y - 3z + 5 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - y - 3z - 4 = 0$$
$$2x - 2y - 2z + 7 = 0$$

lie on a sphere. Find its equation.

17 Prove that in general there is one and only one sphere S which cuts four spheres S_1, S_2, S_3, S_4 orthogonally and that S cuts every sphere of the system $S_1 + kS_2 + lS_3 + mS_4 = 0$ orthogonally.

11 ಉದಾ : 8 ರಲ್ಲಿನ ಸಮಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯೂಹದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಗೋಳಗಳಿವೆ (ಇವಕ್ಕೆ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು) ಎಂದೂ ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(\pm\sqrt{d}, 0, 0)$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

12 ಉದಾ : 11 ರಲ್ಲಿನ ಪರಮಾವಧಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಯಾವುದೇ ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣ $x^2+y^2+z^2+2By+2Cz-d=0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಗೋಳ ಸಮಮೂಲಾಕ್ಷ ವ್ಯೂಹದ ಗೋಳಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

13 $x^2+y^2+z^2=5$, $x+2y+3z=3$ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಹೋಗಿ $4x+3y=15$ ತಳವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸತಕ್ಕ ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

14 ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗಿ $x+y+z=5$ ತಳವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸತಕ್ಕ ಗೋಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ಪಥವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

15 OA, OB, OC ಎಂಬವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳು. ಇವುಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ (l_r, m_r, n_r), $r = 1, 2, 3$. $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ಆದರೆ OABC ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣ

$$x^2+y^2+z^2-x(al_1+bl_2+cl_3)-y(am_1+bm_2+cm_3)$$
$$-z(an_1+bn_2+cn_3)=0$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16 $x^2+y^2+z^2-2x+3y-4z-6=0$

$3x+2y-3z+5=0$

$x^2+y^2+z^2-3x-y-3z-4=0$

$2x-2y-2z+7=0$

ವೃತ್ತಗಳು ಒಂದೇ ಗೋಳದ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

17 ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ನಾಲ್ಕು ದತ್ತ ಗೋಳಗಳಾದ S_1, S_2, S_3, S_4 ನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸತಕ್ಕ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗೋಳ S ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದೂ S ಗೋಳ $S_1+kS_2+lS_3+mS_4=0$ ವ್ಯೂಹದ ಎಲ್ಲ ಗೋಳಗಳನ್ನೂ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

18 If the sphere $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ cuts the sphere $x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0$ along a great circle of the latter prove that

$$2(uu'+vv'+ww')=d+d'+2r'^2$$

where r' is the radius of the latter sphere.

[The plane of the common section must pass through the centre of the second sphere]

19 Find the equation of the sphere having the circle

$$x^2+y^2+z^2-2x+3y-5z+2=0=3x-y+2z-6$$

as a great circle.

20 Prove that the circumsphere of the tetrahedron formed by the four planes $x=0$, $y=0$, $z=0$, $lx+my+nz+k=0$ is given by the equation

$$x^2+y^2+z^2+k\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}\right)=0$$

[Compare with Ex. 2]

21 Find the equation of the sphere circumscribing the tetrahedron whose vertices are O (0, 0, 0), A (a, 0, 0), B (0, b, 0), and C (0, 0, c). If S is the centre of this sphere prove that the sphere on OS as diameter passes through the middle points of the six edges of the tetrahedron OABC.

22 Prove that the condition that five given points (x_r, y_r, z_r), $r=1,\dots,5$ lie on a sphere is that

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Rewrite this as

$$\begin{vmatrix} 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & x_5^2+y_5^2+2z_5^2 \end{vmatrix}=0$$

Multiplying the two determinants obtain the condition in the form

18 $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ಗೋಳ $x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0$ ಗೋಳವನ್ನು ಇದರ ಮಹಾವೃತ್ತವೊಂದರಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ

$2(uu'+vv'+ww')=d+d'+2r'^2$ (r' = ಎರಡನೆಯ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ಛೇದದ ತಳ ಎರಡನೆಯ ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹೋಗಬೇಕು.]

19 $x^2+y^2+z^2-2x+3y-5z+2=0=3x-y+2z-6$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಮಹಾವೃತ್ತವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

20 $x=0,\ y=0,\ z=0,\ lx+my+nz+k=0$ ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ತಳಗಳಿಂದ ಆಗುವ ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಪರಿಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣ

$$x^2+y^2+z^2+k\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}\right)=0$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ಉದಾ : 2 ರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿ.]

21 O (0, 0, 0), A (a, 0, 0), B (0, b, 0), C (0, 0, c) ಶೃಂಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಪರಿಗೋಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಈ ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ S ಆದರೆ O S ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಗೋಳ OABC ಚತುಷ್ಫಲಕದ ಆರು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

22 ಐದು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು (x_r, y_r, z_r), $r=1,\cdots,5$ ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲಿರಲು ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧ

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇದನ್ನು

$$\begin{vmatrix} 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & x_5^2+y_5^2+z_5^2 \end{vmatrix} = 0$$

ಎಂದು ಬರೆದು, ಎರಡೂ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ, ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{51}^2 & d_{52}^2 & d_{53}^2 & d_{54}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

where d_{rs} is the distance between the points (x_r, y_r, z_r) and (x_s, y_s, z_s).

23 If two spheres S_1 and S_2 are orthogonal prove that the polar plane of any point P on S_1 w.r.t. S_2 passes through the other end of the diameter of S_1 through P.

[The polar plane is defined on lines similar to the polar of a point w.r.t. a circle]

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{51}^2 & d_{52}^2 & d_{53}^2 & d_{54}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ಇಲ್ಲಿ (x_r, y_r, z_r) ಮತ್ತು (x_s, y_s, z_s) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು d_{rs} ಎಂದು ಕರೆದಿದ್ದೇವೆ.

23 S_1, S_2 ಗೋಳಗಳು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ S_1 ರ ಮೇಲಣ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು P ಗೆ S_2 ನ್ನು ಕುರಿತ ಧ್ರುವೀಯ ತಳ P ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ S_1ರ ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

[ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವಂತೆಯೇ ಇಲ್ಲಿ ಧ್ರುವೀಯ ತಳವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.]

CHAPTER 8

THE CONE

8.1 Let all the points of a curve (closed or open) be joined to a fixed point. The surface obtained is called a cone, and the fixed point is the **vertex** of the cone. The given curve is the **base-curve.** We may take a plane section of this cone as the base-curve, since this generates the same cone. The vertex however is considered as a point outside the plane of the curve.

Let the vertex be taken as the origin of coordinates. If P (x, y, z) is a point on the cone (kx, ky, kz) are the coordinates of another point on the generator OP. Hence, if the equation of the cone is $F(x, y, z) = 0$, the equation $F(kx, ky, kz) = 0$ must also be true, for all values of k. This is possible only if $F(x, y, z)$ is homogeneous in x, y, z. Conversely, by the same argument, a homogeneous equation $F(x, y, z) = 0$ represents a cone with vertex O. The cone is said to be of degree n if $F(x, y, z)$ is homogeneous of degree n. Putting $z = c$, this gives an equation of degree n in x, y. Hence any plane section is a curve of the nth degree.

We shall be generally dealing with quadric or second-degree cones. Any plane section gives a plane curve of the second degree, *i.e.*, a conic. It can be proved that this conic may be an ellipse, parabola or hyperbola according to the position of the plane. It may also be a circle. If the plane passes through the vertex of the cone, the section is a pair of lines. For if P is any point on the section, the line OP must form part of the section. When the two line

ಅಧ್ಯಾಯ ೮

ಶಂಕು

೮.೧ ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯ (ಆವೃತವಾಗಿರಲಿ, ಅನಾವೃತವಾಗಿರಲಿ) ಬಿಂದುಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಉಂಟಾಗುವ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ **ಶಂಕು** ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು ಶಂಕುವಿನ ಶೃಂಗ. ದತ್ತರೇಖೆ **ಮೂಲರೇಖೆ.** ಮೂಲರೇಖೆಯನ್ನು ಈ ಶಂಕುವಿನ ತಳಛೇದವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು, ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಛೇದವೂ ಅದೇ ಶಂಕುವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಶೃಂಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಈ ರೇಖೆಯ ತಳದ ಹೊರಗಿರುವ ಬಿಂದು ಎಂದು ಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಶೃಂಗವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುವೊಂದು P (x, y, z) ಆದರೆ, ಜನಕರೇಖೆ OP ಯ ಮೇಲೆ (kx, ky, kz) ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ $F(x, y, z) = 0$ ಆದರೆ, $F(kx, ky, kz) = 0$ ಸಮೀಕರಣವೂ k ಯ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಿರಬೇಕು. $F(x, y, z)$ ಉತ್ಪನ್ನ x, y, z ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತೀಯವಾದುದಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಇದು ಸಾಧ್ಯ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಇದೇ ತರ್ಕದಂತೆ, ಸಮಘಾತದ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣ $F(x, y, z) = 0$ ಶೃಂಗ O ಆಗಿ ಉಳ್ಳ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. $F(x, y, z) = 0$ n ಡಿಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಶಂಕು n ಡಿಗ್ರಿಯದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $z=c$ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ, ಇದು x, y ಗಳಲ್ಲಿ n ಡಿಗ್ರಿಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ಯಾವುದೇ ತಳ ಛೇದ n ಡಿಗ್ರಿಯ ರೇಖೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾವು ಎರಡನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಯ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸುವೆವು. ಯಾವುದೇ ತಳಛೇದ ಎರಡನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಯ ಸಮತಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಂದರೆ ಒಂದು ಶಂಕುಜವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ತಳದ ಸ್ಥಾನಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಈ ಶಂಕುಜ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವೋ ಪ್ಯರಾಬೊಲವೊ ಹೈಪರ್‌ಬೊಲವೋ ಆಗಿರಬಹುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ವೃತ್ತವೂ ಆಗಿರಬಹುದು. ತಳ ಶಂಕುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋದರೆ, ಛೇದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾಯುಗ್ಮ, ಏಕೆಂದರೆ ಛೇದದ ಮೇಲೆ P ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೆ, OP ಸರಳರೇಖೆ ಛೇದದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿರಬೇಕು. ಎರಡು

coincide, the plane is said to be a tangent plane. It touches the cone along the entire length of these coincident lines.

Joining the points on the circumference of a circle, to a point on the normal to the plane of the circle through its centre, we obtain a **right circular cone.** If O be the vertex of the cone, C the centre of the circle and P any point on the circle, the angle $C\hat{O}P$ is constant, being equal to $\tan^{-1}\frac{r}{h}$, where r is the radius of the circle, and h is CO, the height of the cone. This angle is called the semi-vertical angle of the cone.

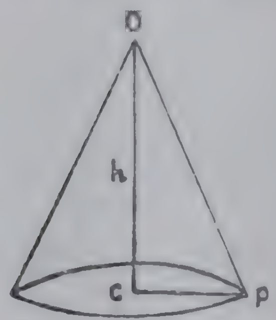


Fig. 8.1

The right circular cone can be obtained by rotating the hypotenuse OP of the triangle OCP about the axis OC. It is thus a **cone of revolution.**

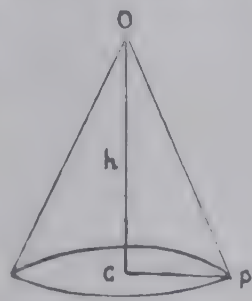
8.2 The lines joining the vertex to the points of the base-curve are called the generators of the cone. If $F(x, y, z) = 0$ is the equation of the cone and $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ the equations of a generator the equation $F(lr, mr, nr) = 0$ is satisfied for all values of r. Hence $F(l, m, n) = 0$, is a relation between the direction cosises of the generator. Conversely, given this relation between the direction cosines, the corresponding line through O generates the cone whose equation is $F(x, y, z) = 0$.

We shall be dealing with cones of the second degree only. If the vertex is the origin, the equation of the cone is given by the general homogeneous equation of the second degree in x, y, z, viz.,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

ರೇಖೆಗಳೂ ಐಕ್ಯವಾದರೆ, ತಳವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶತಳವೆನ್ನುವೆವು. ಇದು ಶಂಕುವನ್ನು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ತಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ, **ಒಂದು ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು** ಒದಗುತ್ತದೆ. ಈ ಶಂಕುವಿನ ಶೃಂಗ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ C ಆಗಿದ್ದು, ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು P ಆದರೆ, COP ಕೋನ ಸ್ಥಿರ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= r$, CO $= h$, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಆದರೆ, ಈ ಕೋನ $= \tan^{-1}\dfrac{r}{h}$. ಈ ಕೋನಕ್ಕೆ ಶಂಕುವಿನ **ಶೃಂಗಾರ್ಧ ಕೋನ** ಎಂದು ಹೆಸರು.



ಚಿತ್ರ ೮.೧

OCP ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ OP ಯನ್ನು OC ಅಕ್ಷದ ಸುತ್ತ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವುದರಿಂದ ಮೇಲಣ ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು **ಭ್ರಮಣ ಶಂಕು.**

೮.೨ ಶೃಂಗವನ್ನು ಮೂಲ ರೇಖೆಯ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಶಂಕುವಿನ ಜನಕ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ $F(x, y, z) = 0$ ಆಗಿ ಜನಕರೇಖೆಯೊಂದರ ಸಮೀಕರಣಗಳು $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$ ಆದರೆ, $F(lr, mr, n) = 0$ ಸಮೀಕರಣ r ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $F(l, m, n) = 0$ ಇದು ಜನಕರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳಿಗೆ ಈ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದರೆ, O ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಅಂಥ ರೇಖೆ $F(x, y, z) = 0$ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಶಂಕುವನ್ನು ಜನಕಿಸುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಯ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕುರಿತು ಹೇಳುವೆವು. ಶೃಂಗ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ x, y, z ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಯ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮೀಕರಣ, ಎಂದರೆ

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

It follows that a cone of the second degree can be determined so as to pass through five concurrent lines. For if the direction cosines of the lines are (l_r, m_r, n_r), $r = 1, 2, 3, 4, 5$ we obtain 5 relations

$$al_r^2 + bm_r^2 + cn_r^2 + 2fm_r n_r + 2gn_r l_r + 2hl_r m_r = 0$$
$$r = 1, 2, 3, 4, 5$$

These give solutions for $a : b : c : f : g : h$.

8.3 The equation of a cone of the second degree which passes through the coordinate axes is of the form

$$fyz + gzx + hxy = 0.$$

For, the equations of Ox are $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{0}$. The direction cosines $(1, 0, 0)$ satisfy $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$, only if $a = 0$. Similarly, $b = 0$, $c = 0$.

A cone of the second degree can be drawn so as to pass through two sets of three mutually perpendicular lines through the origin.

Choose one set as the coordinate axes, so that the equation of the cone passing through these lines is of the form

$$fyz + gzx + hxy = 0$$

Let (l_r, m_r, n_r), $r = 1, 2, 3$ be the direction cosines of the other three lines. These lie on the cone if

$$fm_1 n_1 + gn_1 l_1 + hl_1 m_1 = 0$$
$$fm_2 n_2 + gn_2 l_2 + hl_2 m_2 = 0$$
$$fm_3 n_3 + gn_3 l_3 + hl_3 m_3 = 0$$

But, the relations between the direction cosines of three mutually perpendicular lines include

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

and two similar equations.

ಆದ್ದರಿಂದ ಐದು ಸಂಪಾತ ರೇಖೆಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವಂತೆ ಎರಡನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಯ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಈರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು

(l_r, m_r, n_r), $r = 1, 2, 3, 4, 5$ ಆದರೆ

$$al_r^2 + bm_r^2 + cn_r^2 + 2fm_r n_r + 2g n_r l_r + 2h l_r m_r = 0, \quad r = 1, 2, 3, 4, 5$$

ಎಂಬ ಐದು ಸಂಬಂಧಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಿಂದ $a : b : c : f : g : h$ ಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

೮.೩. ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಎರಡನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಯ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ $fyz + gzx + h\,xy = 0$ ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ox ನ ಸಮೀಕರಣಗಳು $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$.

ಇದರ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (1, 0, 0). ಇವು $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸಬೇಕಾದರೆ $a = 0$ ಆಗಬೇಕು. ಹೀಗೆಯೇ $b = 0$, $c = 0$

ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮೂರು ರೇಖೆಗಳ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ಎರಡನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಯ ಶಂಕುವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ $fyz + gzx + hxy = 0$ ಎಂಬ ರೂಪವುಳ್ಳದು. ಇನ್ನು ಮೂರು ರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು (l_r, m_r, n_r), $r = 1, 2, 3$ ಆಗಿರಲಿ. ಇವು ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲಿರಬೇಕಾದರೆ

$$f m_1 n_1 + g n_1 l_1 + h l_1 m_1 = 0$$
$$f m_2 n_2 + g n_2 l_2 + h l_2 m_2 = 0$$
$$f m_3 n_3 + g n_3 l_3 + h l_3 m_3 = 0$$

ಆದರೆ, ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳ ನಡುವೆ

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$$

Hence the above three equations are consistent, the sum of any two equations leading to the third. Also $f : g : h$ are determined by solving two of the equations.

8.4 The condition that the plane $lx + my + nz = 0$ touches the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$.

Let us attempt to solve these equations for $x : y : z$. For tangency, we must obtain two coincident solutions. Eliminating z, by putting $z = -\dfrac{lx + my}{n}$ in the second equation, we obtain, after multiplying by n^2

$$n^2(ax^2 + 2hxy + by^2) + c(lx + my)^2 - 2n(fy + gx) \times (lx + my) = 0$$

or $$x^2(cl^2 + an^2 - 2gnl) + 2xy(hn^2 + clm - gmn - fnl) + y^2(bn^2 + cm^2 - 2fmn) = 0$$

The plane touches the cone if the two values of $x : y$ coincide.

Hence, $$(cl^2 + an^2 - 2gnl)(bn^2 + cm^2 - 2fmn) = (hn^2 + clm - gmn - fnl)^2$$

Expanding and dividing out by n^2, we obtain

$$(bc - f^2)l^2 + (ca - g^2)m^2 + (ab - h^2)n^2 + 2(gh - af)mn + 2(hf - bg)nl + 2(fg - ch)lm = 0$$

This can be briefly written as

$$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Fmn + 2Gnl + 2Hlm = 0$$

where A, B, C, F, G, H are cofactors of the correspondiug small letters in the determinant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

This is called the **tangential equation** of the cone.

ಮತ್ತು ಇಂಥ ಇನ್ನೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಣ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಮೂರನೆಯದು ಒದಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಂಬದ್ಧವಾಗಿವೆ. ಎರಡನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ $f : g : h$ ಪಡೆಯಬಹುದು.

೮.೪ $lx + my + nz = 0$ **ತಳ** $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ **ಶಂಕುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧ.**

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $x : y : z$ ಗಳಿಗೆ ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಸ್ಪರ್ಶಕ್ಕೆ ಎರಡು ಐಕ್ಯ ಮೂಲಗಳು ಬರಬೇಕು. ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $z = -\frac{lx+my}{n}$ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ, z ವಿಸರ್ಜಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಸರ್ಜನಮಾಡಿ n^2 ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, $n^2 (ax^2 + 2\,lxy + by^2) + c\,(lx + my)^2 - 2n\,(fy + gx)\,(lx + my) = 0$

ಅಥವಾ

$$x^2 (cl^2 + an^2 - 2gnl) + 2xy(hn^2 + clm - gmn - fnl) + y^2 (bn^2 + cm^2 - 2fmn) = 0$$

ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ ತಳ ಶಂಕುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಬೇಕಾದರೆ, $x : y$ ಗಳ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳೂ ಐಕ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ

$(cl^2 + an^2 - 2gnl)\,(bn^2 + cm^2 - 2fmn) = (hn^2 + clm - gmn - fnl)^2$. ವಿಸ್ತರಿಸಿ n^2 ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದ ಮೇಲೆ

$$(bc - f^2)\,l^2 + (ca - g^2)\,m^2 + (ab - h^2)\,n^2 + 2(gh - af)\,mn + 2\,(hf - bg)\,nl + 2\,(fg - ch)\,lm = 0$$

ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

ಎಂಬ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ, ಸಣ್ಣ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಹಾಪವರ್ತಕಗಳನ್ನು ಅದೇ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಬರೆದರೆ, ಮೇಲಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$A\,l^2 + B\,m^2 + C\,n^2 + 2F\,mn + 2G\,nl + 2H\,lm = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಶಂಕುವಿನ **ಸ್ಪರ್ಶಸಮೀಕರಣ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

8.5 The reciprocal cone. The line through O whose direction cosines satisfy the above tangential equation generates the cone $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0.$

But the line $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$ is the normal to the plane $lx + my + nz = 0.$

Thus, the normals at O to the tangent planes to the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ generate another cone $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0.$ This is called the **reciprocal cone** of the former. It can be seen that each of the two cones is the reciprocal of the other, by verifying the relations $BC - F^2 = a\Delta$, $GH - AF = f\Delta$, etc.

8.6 When the plane $lx + my + nz = 0$ does not touch the cone, the quadratic in $x : y$ obtained in § 8.4 gives two solutions $x_1 : y_1$ and $x_2 : y_2$. The equation $lx + my + nz = 0$ gives the corresponding value of z. We thus obtain the direction cosines $x_1 : y_1 : z_1$ and $x_2 : y_2 : z_2$ of the two lines along which the plane intersects the cone.

We now have from the quadratic in $x : y$,

$$\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} = \frac{bn^2 + cm^2 - 2fmn}{cl^2 + an^2 - 2gnl}$$

So, we write

$$x_1 x_2 = \lambda (bn^2 + cm^2 - 2fmn)$$

$$y_1 y_2 = \lambda (cl^2 + an^2 - 2gnl)$$

By symmetry, or by forming a similar equation in $x : z$ as in § 7.4,

$$z_1 z_2 = \lambda (am^2 + bl^2 - 2hlm)$$

೮.೫ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಶಂಕು. O ಮೂಲಕ ಹೋಗತಕ್ಕ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು ಮೇಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸಿದರೆ, ಅಂಥ ರೇಖೆ $A x^2+B y^2+C z^2+2 F yz+2 G zx+2 H xy=0$ ಎಂಬ ಶಂಕುವನ್ನು ಜನಕಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ ರೇಖೆ $lx+my+nz=0$ ತಳಕ್ಕೆ ಲಂಬ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ ಶಂಕುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶ ತಳಗಳಿಗೆ O ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು $A x^2+B y^2+C z^2+2 F y z+2 G z x+2 H xy=0$ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಜನಕಿಸುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಶಂಕುವಿನ **ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಶಂಕು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಶಂಕುಗಳೂ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು, ಏಕೆಂದರೆ $BC-F^2=a\,\Delta$, $GH-AF=f\,\Delta$ ಮುಂತಾದ ಸಂಬಂಧಗಳಿರುತ್ತವೆ.

೮.೬ $lx+my+nz=0$ ತಳ ಶಂಕುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸದಿದ್ದಾಗ, § ೮.೪ ರಲ್ಲಿ ಬಂದ $x:y$ ನಲ್ಲಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು $x_1:y_1$ ಮತ್ತು $x_2:y_2$ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಇವಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ z ಬೆಲೆ $lx+my+nz=0$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತಳ ಶಂಕುವನ್ನು ಛೇದಿಸತಕ್ಕ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳಾದ $x_1:y_1:z_1$ ಮತ್ತು $x_2:y_2:z_2$ ದೊರಕುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x:y$ ನಲ್ಲಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದಿಂದ

$$\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}=\frac{bn^2+cm^2-2fmn}{cl^2+an^2-2gnl}$$

ಇದನ್ನು

$$x_1 x_2=\lambda(bn^2+cm^2-2fmn)$$

$$y_1 y_2=\lambda(cl^2+an^2-2gnl)$$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.

ಸಮಾಂಗತೆಯಿಂದ ಅಥವಾ ಹೀಗೆಯೇ § ೭.೪ ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದಂತೆ $x:z$ ನಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರಿಂದ,

$$z_1 z_2=\lambda(am^2+bl^2-2hlm).$$

The lines with directions $x_1 : y_1 : z_1$ and $x_2 : y_2 : z_2$ are at right angles, if $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$

Hence, the plane $lx + my + nz = 0$ **cuts the cone**

$F(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$
in **perpendicular generators, if**

$(b+c) l^2 + (c+a) m^2 + (a+b) n^2 - 2fmn - 2gnl - 2hlm - 0.$
Adding $al^2 + bm^2 + cn^2$ to both sides, this condition is conveniently remembered in the form

$$(a+b+c)(l^2+m^2+n^2) = F(l, m, n)$$

8.7 Suppose now that this condition is satisfied, and that the normal at O to the plane $lx + my + nz = 0$ is also a generator of the cone $F(x, y, z) = 0$. Hence $F(l, m, n) = 0$, The above condition then reduces to $a + b + c = 0$. When $a + b + c = 0$, if we select the values of l, m, n as the direction cosines of any generator of the cone $F(x, y, z) = 0$, the condition that $lx + my + nz = 0$ cuts the cone along perpendicular generators is automatically satisfied. These two generators and the normal to the plane then give three mutually perpendicular generators of the cone.

The condition that the cone $F(x, y, z) = 0$ **has three mutually perpendicular generators is that** $a + b + c = 0$.

It is also clear that when this condition holds, the cone has infinitely many sets of three mutually perpendicular generators.

Such a cone is called a **rectangular cone.**

8.8 Equation of the cone with a given vertex and a given base.

$x_1 : y_1 : z_1$ ಮತ್ತು $x_2 : y_2 : z_2$ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳುಳ್ಳ ರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರಲು $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ ಆಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ

$F(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ $= 0$ **ಶಂಕುವನ್ನು** $lx + my + nz = 0$ **ತಳ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಜನಕ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬೇಕಾದರೆ**

$$(b+c)\, l^2 + (c+a)\, m^2 + (a+b)\, n^2 - 2f\,mn - 2g\,nl - 2h\,lm = 0$$

ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವಿರಬೇಕು.

ಎರಡು ಕಡೆಗೂ $al^2 + bm^2 + cn^2$ ಕೂಡಿಸಿ ಈ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು

$$(a+b+c)(l^2+m^2+n^2) = F(l, m, n)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

೮.೭ ಈ ನಿರ್ಬಂಧ ಸರಿದೂಗಿದೆ ಎನ್ನೋಣ, ಜತೆಗೆ $lx + my + nz = 0$ ತಳಕ್ಕೆ O ನಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಸಹ $F(x, y, z) = 0$ ಶಂಕುವಿಗೆ ಒಂದು ಜನಕ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $F(l, m, n) = 0$. ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಬಂಧ $a+b+c = 0$ ಎಂದು ಸುಲಭಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. $a+b+c = 0$ ಆದಾಗ, $F(x, y, z) = 0$ ಶಂಕುವಿನ ಯಾವುದೇ ಜನಕ ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳನ್ನು l, m, n ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $lx + my + nz = 0$ ತಳ ಶಂಕುವನ್ನು ಲಂಬ ಜನಕಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧ ತಾನಾಗಿಯೇ ಸರಿಹೋಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಜನಕಗಳೂ ತಳದ ಲಂಬವೂ ಒಟ್ಟು ಸೇರಿ ಶಂಕುವಿನ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ಜನಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

$F(x, y, z) = 0$ **ಶಂಕುವಿಗೆ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಜನಕ ರೇಖೆಗಳಿರಬೇಕಾದರೆ,** $a+b+c = 0$ **ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವಿರಬೇಕು.**

ಈ ನಿರ್ಬಂಧ ಸರಿಯಿರುವಾಗ, ಹೀಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಜನಕರೇಖಾ ತ್ರಯಗಳನ್ನು ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂಬುದೂ ಮೇಲಣ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಂಥ ಶಂಕುವಿಗೆ **ಆಯಾಕಾರ ಶಂಕು** ಎಂದು ಹೆಸರು.

೮.೮ ಶೃಂಗವೂ ಮೂಲರೇಖೆಯೂ ದತ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿಕೆ.

When the vertex is the origin, and the base is given as the intersection of two surfaces, the equation of the cone is readily obtained by obtaining a homogeneous equation by the help of the equations of the two surfaces.

As an example, to find the cone whose vertex is the origin, and whose base is the curve

$$ax^2 + by^2 = 2z, \; lx + my + nz = p.$$

The required equation is

$$p\,(ax^2 + by^2) = 2z\,(lx + my + nz).$$

When the vertex is any other point (α, β, γ), the following process is convenient.

To find the cone whose vertex is the point (α, β, γ), and whose base is the parabola $y^2 = 4ax$, $z = 0$.

Any line through (α, β, γ) is $\dfrac{x-\alpha}{l} = \dfrac{y-\beta}{m} = \dfrac{z-\gamma}{n} = r.$

This will be a generator of the cone, if it intersects the curve. Hence, for some value of r, the point $(\alpha + lr, \beta + mr, \gamma + nr)$ satisfies both the equations $y^2 = 4ax$ and $z = 0$

$$\therefore \quad (\beta + mr)^2 = 4a\,(\alpha + lr), \; \gamma + nr = 0$$

Putting $r = -\dfrac{\gamma}{n}$, we eliminate r

$$\therefore \quad (\beta n - \gamma m)^2 = 4an\,(\alpha n - \gamma l)$$

Substituting $l : m : n = x-\alpha : y-\beta : z-\gamma$, we get the equation of the cone

$$\therefore \quad (\beta.\overline{z-r} - \gamma.\overline{y-\beta})^2 = 4a\,(z-\gamma)\,(\alpha.\overline{z-\gamma} - \gamma.\overline{x-\alpha})$$

$$\text{or} \quad (\beta z - \gamma y)\,y = 4a\,(z-\gamma)\,(\alpha z - \gamma x)$$

Exercises 8.1

1 Find the equation of the right circular cone whose vertex is the origin, the direction cosines of the axis are $l : m : n$, and semivertical angle is α.

ಶೃಂಗ ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ ಮೂಲರೇಖೆ ಎರಡು ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ಸಂಧಿರೇಖೆ ಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ದೆಸೆಯಿಂದ ಒಂದು ಸಮಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರಿಂದ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ ಒಡನೆಯೇ ಲಭಿಸು ವುದು. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಇದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ಶೃಂಗ ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ ಮೂಲರೇಖೆ $ax^2+by^2 = 2z$, $lx+my+nz = p$ ಆಗಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ ವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ : $p\ (ax^2+by^2) = 2z\,(lx+my+nz)$. ಶೃಂಗ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದು (α, β, γ) ಆದಾಗ, ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನ ಅನು ಕೂಲಿಸುವುದು,

ಶೃಂಗ (α, β, γ) ಬಿಂದು, ಮೂಲರೇಖೆ $y^2 = 4ax$, $z = 0$ ಎಂಬ ಪ್ಯರಾಬೊಲವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಶಂಕುವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

(α, β, γ) ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆ

$\dfrac{x-\alpha}{l} = \dfrac{y-\beta}{m} = \dfrac{z-\gamma}{n} = r$. ಇದು ಶಂಕುವಿನ ಜನಕರೇಖೆಯಾದರೆ, ಅದು ಮೂಲ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, r ನ ಯಾವುದೋ ಬೆಲೆಗೆ, $(\alpha+lr, \beta+mr, \gamma+nr)$ ಬಿಂದು $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $z = 0$ ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ ಸರಿದೂಗಿಸಬೇಕು.

$$\therefore\ (\beta+mr)^2 = 4a\,(\alpha+lr), \quad \gamma+nr = 0$$

$r = -\dfrac{\gamma}{n}$ ಹಾಕಿ, r ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸುವೆವು.

$$\therefore\ (\beta n-\gamma m)^2 = 4an\,(\alpha n-\gamma l)$$

$l : m : n = x-\alpha : y-\beta : z-\gamma$ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ

$$(\beta.\overline{z-\gamma} - \gamma.\overline{y-\beta})^2 = 4a\,(z-\gamma)\,(\alpha.\overline{z-\gamma} - \gamma.\overline{x-\alpha})$$

ಅಥವಾ $(\beta z-\gamma y)^2 = 4a\,(z-\gamma)\,(\alpha z-\gamma x)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1 ಶೃಂಗ ಮೂಲಬಿಂದು, ಅಕ್ಷದ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು $l : m : n$, ಶೃಂಗಾರ್ಧ ಕೋನ α ಉಳ್ಳ ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

[If OP (x, y, z) is any point on the cone, the angle between OP and the line $l : m : n$ is α.]

2 Deduce that the equation $(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda (lx + my + nz)^2$ represents a right circular cone whose semivertical angle is gievn by $\lambda \cos^2 \alpha = (l^2 + m^2 + n^2)^{-1}$.

3 Find the equation of the right circular cone whose vertex is (α, β, γ), the direction cosines of the axis are $l : m : n$, and semivertical angle is α.

4 Find the directions of the lines of intersection of the plane $x - 5y + 3z = 0$ with the cone $7x^2 + 5y^2 - 3z^2 = 0$.

5 Find the directions of the lines of intersection of the plane $3x + y + 5z = 0$ with the cone

$6yz - 2zx + 5xy = 0$

6 Prove that the cones

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \text{ and } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$$

are mutually reciprocal.

7 Prove that the perpendiculars through the origin to the tangent planes of the cone

$3x^2 + 4y^2 - 5z^2 - 2yz + 4zx - 6xy = 0$ generate the cone $21x^2 + 19y^2 - 3z^2 + 6yz + 10zx + 34xy = 0$.

8 Prove that the cone

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$

has three mutually perpendicular tangent planes if

$bc + ca + ab = f^2 + g^2 + h^2$.

[The reciprocal cone is rectangular. $\therefore$ A + B + C = 0]

9 Write down the condition that the plane

$ax + by + cz = 0$ cuts the cone $fyz + gzx + hxy = 0$ in perpendicular generators.

10 Prove that the plane $lx + my + nz = 0$ cuts the cone $ax^2 + by^2 - (a + b) z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$

in perpendicular lines if

[ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲೆ P $(x, y\ z)$ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೆ, OP ಗೂ $l : m : n$ ರೇಖೆಗೂ ನಡುವಣ ಕೋನ α]

2 ಆದ್ದರಿಂದ, $(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda\ (l x + m y + n z)^2$ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಲಂಬವೃತ್ತೀಯಂ ಶಂಕುವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಅದರ ಶೃಂಗಾರ್ಧ ಕೋನ $\lambda \cos^2 \alpha = (l^2 + m^2 + n^2)^{-1}$ ಎಂಬುದರಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3 ಶೃಂಗ (α, β, γ) ಬಿಂದು, ಅಕ್ಷದ ದಿಕ್ಕೋಟಿಜ್ಯಾಗಳು l, m, n ಶೃಂಗಾರ್ಧ ಕೋನ α ಉಳ್ಳ ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

4 $x - 5y + 3z = 0$ ತಳ $7x^2 + 5y^2 - 3z^2 = 0$ ಶಂಕುವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

5 $3x + y + 5z = 0$ ತಳ $6yz - 2zx + 5xy = 0$ ಶಂಕುವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

6 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ ಮತ್ತು $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} = 0$ ಪರಸ್ಪರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಶಂಕುಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

7 $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 - 2yz + 4zx - 6xy = 0$ ಶಂಕುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶತಳಗಳಿಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು $21x^2 + 19y^2 - 3z^2 + 6yz + 10zx + 34xy = 0$ ಶಂಕುವನ್ನು ಜನಕಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8 $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ ಶಂಕುವಿಗೆ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶತಳಗಳಿದ್ದರೆ, $bc + ca + ab = f^2 + g^2 + h^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಶಂಕು ಆಯಾಕಾರವುಳ್ಳದ್ದು $\therefore$ A+B+C = 0]

9 $ax + by + cz = 0$ ತಳ $fyz + g\,zx + hxy = 0$ ಶಂಕುವನ್ನು ಲಂಬ ಜನಕಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

10 $lx + my + nz = 0$ ತಳ
$ax^2 + by^2 - (a+b)z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ ಶಂಕುವನ್ನು ಲಂಬರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ,

$$al^2 + bm^2 - (a+b)n^2 + 2fmn + 2gnl + 2hlm = 0.$$

[The normal to the plane must lie on the cone]

11 If a right circular cone has three mutually perpendicular generators, prove that its semivertical angle is $\tan^{-1}\sqrt{2}$

[Take the base as the circle $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ and the vertex as $(0, 0, r)$]

12 Find the locus of points from which three mutually perpendicular lines can be drawn to intersect the conic $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$.

13 Prove that the locus of points from which three mutually perpendicular planes can be drawn to touch the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0 \text{ is the sphere}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2.$$

14 Find the equation of the cone with vertex at the origin and base the circle

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0,$$
$$lx + my + nz = p.$$

15 The equation to the cone whose vertex is the origin and base the curve

$$f(x, y) = 0, z = k \text{ is } f\left(\frac{kx}{z}, \frac{ky}{z}\right) = 0.$$

16 The plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets the coordinate axes in A, B, C. Prove that the equation of the cone joining O to the circle A B C is

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0$$

$al^2 + bm^2 - (a+b)n^2 + 2fmn + 2gnl + 2hlm = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ತಳದ ಲಂಬ ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲಿರಬೇಕು.]

11 ಲಂಬವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿಗೆ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ಜನಕಗಳಿದ್ದರೆ ಅದರ ಶೃಂಗಾರ್ಧ ಕೋನ $\tan^{-1}\sqrt{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ಮೂಲ ರೇಖೆಯನ್ನು $x^2+y^2=a^2$, $z = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನಾಗಿಯೂ ಶೃಂಗವನ್ನು $(0, 0, \gamma)$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.]

12 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $ax^2+by^2 = 1$, $z = 0$ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಬಹುದಾದರೆ, ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

13 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ತಳಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಾದರೆ, ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ $x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2$ ಗೋಳ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14 ಶೃಂಗ ಮೂಲಬಿಂದು, ಮೂಲರೇಖೆ $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d = 0$, $lx+my+nz = p$ ಎಂಬ ವೃತ್ತವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

15 ಶೃಂಗ ಮೂಲಬಿಂದು, ಮೂಲರೇಖೆ $f(x, y) = 0$, $z=k$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ $f\left(\frac{kx}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$.

16 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{1z}{c} =$ ತಳ ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷಗಳನ್ನು ABC ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. O ಬಿಂದುವನ್ನು ABC ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವ ಶಂಕುವಿನ ಸಮೀಕರಣ

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17 A cone stands on the curve $F(x, y)=0$, $z=0$, and its vertex is (a, b, c). Show that the section of the cone by the zy-plane is the curve

$$F\left(\frac{az}{z-c}, \frac{bz-cy}{z-c}\right)=0, \ x=0.$$

18 If the equation $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$ represents a cone show that

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix}=0$$

[If the vertex is (x_1, y_1, z_1), transfer the origin to (x_1, y_1, z_1). Only the second degree terms should remain.]

19 Prove that the equation $x^2+2y^2-3z^2+2yz-3zx+2xy-3x+16y-17z-11=0$ is a cone. Find the coordinates of the vertex.

8.9. The cylinder. Consider the equation $F(x, y)=0$. The equation is independent of z. If we specify z, by putting $z=c$, the equations $F(x, y)=0$, $z=c$ denote a plane curve in the plane $z=c$. This curve is shifted parallel to its plane when the value of c is varied. The aggregate of all these curves is a surface whose equation is $F(x, y)=0$. This equation therefore denotes a cylinder standing on the base $F(x, y)=0$, $z=c$ (for any value of c).

We can also give a different approach. The equations $x=x_1$, $y=y_1$ represent a line parallel to the z-axis. The line meets the curve $F(x, y)=0$, $z=c$ if $F(x_1, y_1)=0$. If then we draw a line through any point of the curve parallel to the z-axis, any point on this line satisfies the equation $F(x, y)=0$. The equation $F(x, y)=0$ then denotes a surface generated by lines parallel to the z–axis and meeting the curve $F(x, y)=0$, $z=c$. It is thus a cylinder.

17 ಒಂದು ಶಂಕು $F(x, y) = 0$, $z = 0$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ. ಅದರ ಶೃಂಗ (a, b, c). yz – ತಳದಿಂದ ಶಂಕುವಿನ ಛೇದ $F\left(\frac{ax}{z-c}, \frac{bz-cy}{z-c}\right) = 0$, $x = 0$ ಎಂಬ ರೇಖೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

18 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಕೊಡುವುದಾದರೆ

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix} = 0$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ಶೃಂಗ (x_1, y_1, z_1) ಆದರೆ, ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು (x_1, y_1, z_1) ಗೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿ. ಎರಡನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಯ ಪದಗಳು ಮಾತ್ರ ನಿಲ್ಲಬೇಕು.]

19 $x^2+2y^2-3z^2+2yz-3zx+2xy-3x+16y-17z-11=0$ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಶಂಕುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಶೃಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

೮.೯. ಸಿಲಿಂಡರ್. $F(x, y) = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ಇದು zನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿಯೇ ಇಲ್ಲ. z ಗೆ ಏನಾದರೂ ಬೆಲೆ ಕೊಟ್ಟರೆ, ಉದಾ : $z=c$, $F(x, y) = 0$, $z=c$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳು $z=c$ ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮತಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. c ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಂತೆ, ಈ ರೇಖೆ ಅದರ ತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎತ್ತಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಈ ಎಲ್ಲ ರೇಖೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಒಂದು ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದರ ಸಮೀಕರಣ $F(x, y) = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣ $F(x, y) = 0$, $z=c$ (c ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯಿರಲಿ) ಎಂಬ ಮೂಲರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರ್.

ಬೇರೊಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಬಹುದು. $x=x_1$, $y=y_1$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳು z– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. $F(x_1, y_1) = 0$ ಆದಾಗ, ಈ ರೇಖೆ $F(x, y) = 0$, $z=c$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ z– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದರೆ, ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲ $F(x, y) = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $F(x, y) = 0$ ಸಮೀಕರಣ $F(x, y) = 0$ $z=c$ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸಿ z–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಜನ್ಯವಾಗುವ ಒಂದು ಮೇಲ್ಮೈ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್.

Similarly, F $(y, z) = 0$ is a cylinder whose cross-section is parallel to the plane $x = 0$.

The general equation of a quadric cylinder with generators parallel to the z-axis is

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

In particular, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denotes an elliptic cylinder, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a hyperbolic cylinder, and $y^2 = 4ax$ a parabolic cylinder.

A cylinder can be considered as a limiting form of a cone with its vertex at infinity, in the direction parallel to the generators of the cylinder.

ಹೀಗೆಯೇ $F(y, z) = 0$ ಎಂಬುದು $x=0$ ತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಅಡ್ಡ ಛೇದವುಳ್ಳ ಸಿಲಿಂಡರ್.

ಜನಕರೇಖೆಗಳು z—ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎರಡನೆಯ ಡಿಗ್ರಿಯ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಮೀಕರಣ

$ax^2 + 2lxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ವೈಶೇಷಿಕವಾಗಿ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತೀಯ ಸಿಲಿಂಡರ್, $\frac{x_2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಂಬುದು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಿಯ ಸಿಲಿಂಡರ್, $y^2 = 4ax$ ಎಂಬುದು ಪ್ಯರಾಬೊಲೀಯ ಸಿಲಿಂಡರ್.

ಸಿಲಿಂಡರನ್ನು ಅದರ ಜನಕರೇಖೆಗಳ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅನಂತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಶೃಂಗವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಶಂಕುವೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು.

SOLUTIONS

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಧ್ಯಾಯ ೭

1 $x^2 + y^2 + z^2 - 9x - 5y - 7z = 0$

2 $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0\,;\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

$ka\,(b^{-2} + c^{-2}),\quad kb\,(c^{-2} + a^{-2}),\ kc\ \ (a^{-2} + b^{-2})$, ಇಲ್ಲಿ

$$k = \frac{1}{2(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})}$$

4 $(ul + vm + wn - p)^2 = (u^2 + v^2 + w^2)\ (u^2 + v^2 + w^2 - d)$

7 $\left(\dfrac{2}{19}, \dfrac{3}{19}, \dfrac{5}{19}\right)$

13 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 11 = 0$

$5\,(x^2 + y^2 + z^2) - 4x - 8y - 12z - 13 = 0$

14 $3\,(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z - 5)^2$ ಎಂಬ ಮೇಲ್ಮೈ

16 $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + y + z - 11 = 0$

19 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x + 5y - 8z - 2 = 0$

21 $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

ಅಧ್ಯಾಯ ೮

1 $(l^2 + m^2 + n^2)\ (x^2 + y^2 + z^2) =$

$\sec^2 \alpha\,(lx + my + nz)^2$

3 $[\,l\,(x - \alpha) + m\,(y - \beta) + n\,(z - \gamma)\,]\ \sec^2 \alpha =$

$(l^2 + m^2 + n^2)\ [\,(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2\,]$

4 $1 : 2 : 3$ ಮತ್ತು $-1 : 1 : 2$

5 $1 : 2 : -1$ ಮತ್ತು $2 : -1 : -1$

9 $bcf + cag + abh = 3$

12 $ax^2 + by^2 + (a + b)\,z^2 = 1$ ಎಂಬ ಮೇಲ್ಮೈ

14 $p^2\,(x^2 + y^2 + z^2) + 2p\,(lx + my + nz)$

$\times\,(ux + vy + wz) + d\,(lx + my + nz)^2$

19 $(-1, -2, -3)$.

ಬೆಂಗಳೂರು
ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳ ವಿವರಗಳಿಗೆ
ದಯವಿಟ್ಟು ವ್ಯವಹರಿಸಿ :

ಉಪನಿರ್ದೇಶಕ
ಪ್ರಕಟಣ ಮತ್ತು ಪ್ರಚಾರೋಪನ್ಯಾಸ ವಿಭಾಗ
ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ
ಜ್ಞಾನಭಾರತಿ, ಬೆಂಗಳೂರು-560039

ಈಸ್ಟರ್ನ್ ಪ್ರೆಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು-560029